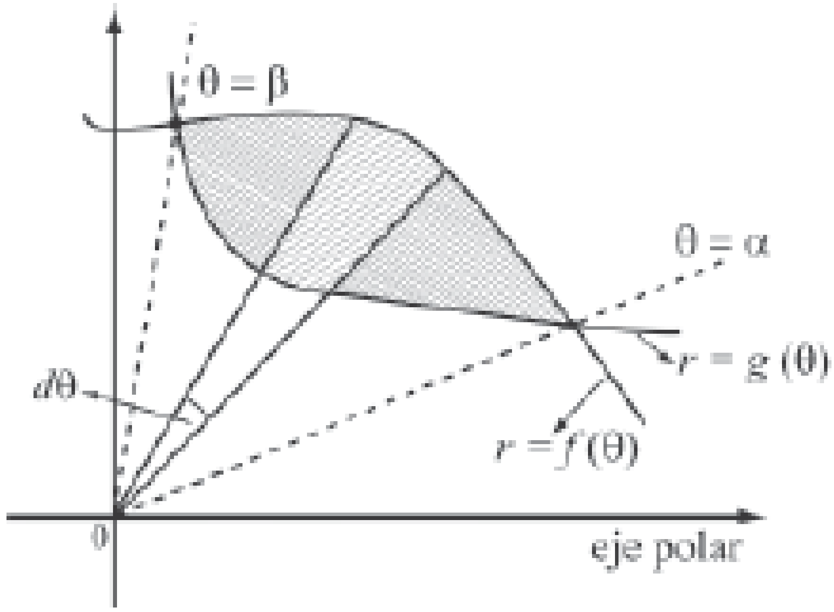
UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

Ley de Creación Nº 29304

Autorizada con Resolución N° 647-2011-CONAFU

**Separata de:**

# ÁREAS EN COORDENADAS POLARES




Lenin Quiñones Huatangari

# Índice general

# Capítulo 1:

# Introducción

La Matemática es el soporte oculto de los avances técnicos que están presentes en la vida cotidiana, vivimos en la sociedad del conocimiento y que cada día, requiere más de sus miembros (principalmente jóvenes y adultos) un especial esfuerzo de formación tanto para vivir en ella como para incorporarse a las tareas productivas ¿Cómo adecuarse a las mejoras y cambios tecnológicos globales, teniendo una sociedad sin bases y sin herramientas matemáticas?

El cálculo de áreas de figuras como el cuadrado, el rectángulo, el rombo, etc., además de sencillo tiene un claro significado: el área de una figura es un número que coincide con el de cuadrados de lado unidad que recubren exactamente la figura. Se puede cuestionar entonces si cualquier figura tiene área y cómo se calcula. Para esto se utilizará las integrales definidas. Hasta ahora hemos aprendido a calcular integrales, sin plantearnos la utilidad que éstas pueden tener. Sin embargo, la integral definida es un método rápido para calcular áreas, volúmenes, longitudes, etc. lejos de los procesos lentos y laboriosos que empleaban los griegos. En física, su empleo es constante, al estudiar el movimiento, el trabajo, la electricidad.Tal cómo hemos visto antes, la integral definida es una generalización del proceso del cálculo de

áreas.
Este trabajo tiene como propósito presentar los aportes en el desarrollo del tema de área de figuras planas en coordenadas polares, el principal objetivo de este trabajo es poder entender el uso de las coordenadas polares y así poder utilizarlas frente a los problemas diarios. Para esto he considerado en el capítulo 2, el sistema de coordenadas polares y finalmente el área de figuras planas bajo coordenadas polares en el capítulo 3.

# Capítulo 2:

# Sistema de Coordenadas Polares

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto o posición del plano se determina por un **ángulo** y una **distancia**.

Para definir las coordenadas polares de un punto en el plano fijamos inicialmente en él un punto $O$ llamado origen (polo) y un rayo inicial (eje polar) desde $O$ (Figura 2.1).

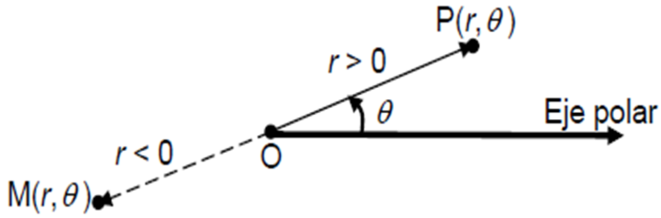



Figura 2.1: Parámetros en las coordenadas polares

A cada punto $P$ del plano se le asigna un par de coordenadas, $(r, \theta)$, llamadas coordenadas polares del punto $P$ y tales que:

- $r$: distancia dirigida de O a P.
- $\theta$: ángulo (positivo o negativo y expresado en radianes) formado por el eje polar y el rayo $OP$ (Figura 2.1).

## 2.1. Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

Para establecer la relación existente entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares, hacemos coincidir inicialmente los dos planos. Es decir, el polo del plano polar coincidiendo con el origen del plano cartesiano y el eje polar con el eje $x$ (Figura 2.2).

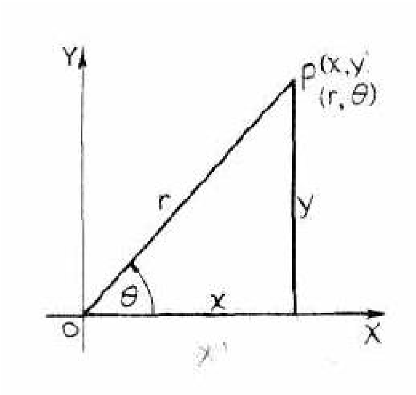



Figura 2.2: Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

De esta forma para el punto $P$ podemos establecer las siguientes relaciones, se deducen facilmente de la Figura 2.2.

$$x^2 + y^2 = r^2 \Longleftrightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

$$\cos\tan = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \tag{2.2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r.\cos\theta \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r.\cos\theta \tag{2.4}$$

En resumen, tendremos que tener en cuenta lo siguiente para convertir de un sistema de coordenadas a otro:

- Si conocemos las coordenadas rectangulares del punto $P(x, y)$, entonces usando (2.1) y (2.2) podemos determinar las coordenadas polares $P(r, \theta)$ del mismo punto.
- Si conocemos las coordenadas polares $P(r, \theta)$ del punto, entonces usando (2.3) y (2.4) podemos determinar las coordenadas rectangulares $P(x, y)$ del mismo punto.

## 2.2. Gráficas importantes en coordenadas polares

1. La gráfica de una ecuación en forma polar

$$\begin{cases} r = a.\cos(n\theta) \\ r = a.\operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

Representa una rosa de $n$ pétalos si $n$ es impar, y de $2n$ pétalos si $n$ es par.

Así por ejemplo, la ecuación $r = 2.\cos(3\theta)$ representa una rosa de tres pétalos, como la que aparece en la Figura 2.3.

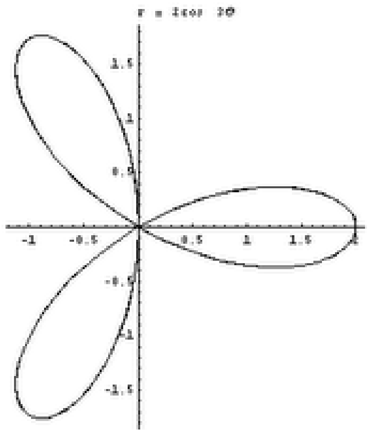


Figura 2.3: Gráfica de $r = 2.\cos(3\theta)$, que representa una rosa de tres pétalos.

2. La gráfica de una ecuación de las formas

$$\begin{cases} r = a \pm b.\cos(\theta) & \text{con } a, b > 0 \\ r = a \pm b.\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Se denomina limazón (figura en forma de caracol) y su forma depende de la relación entre los valores de a y b, así:

- Si $a = b$, se llama **cardioide**. Ver Figura 2.4.
- Si $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, se llama **limazón con nudo**.Ver Figura 2.5.
- Si $1 < \dfrac{a}{b} < 2$, se llama **cardioide con hendidura**.Ver Figura 2.6.
- Si $\dfrac{a}{b} \geq 2$, se llama **limazón convexo**.

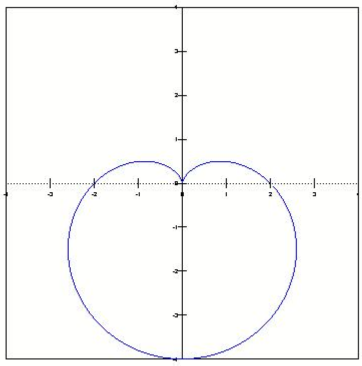


Figura 2.4: Gráfica de coordenadas polares, que representa un cardioide.

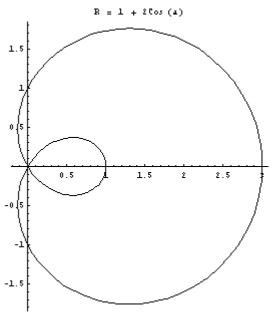



Figura 2.5: Gráfica en coordenadas polares de un Limazón con nudo.

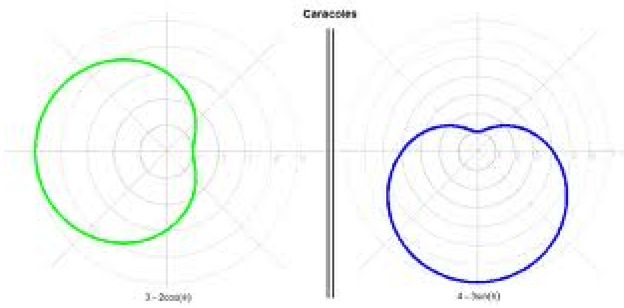



Figura 2.6: Gráfica en coordenadas polares de cardioides con hendidura.

# Capítulo 3:

# Área de Figuras Planas en Coordenadas Polares

La idea central en este trabajo es establecer, usando integrales, una formula para determinar el área de una cierta región acotada por las graficas de dos curvas en polares $r = f(\theta)$ , $r = g(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ que pasan por el polo (Figura 2.7).

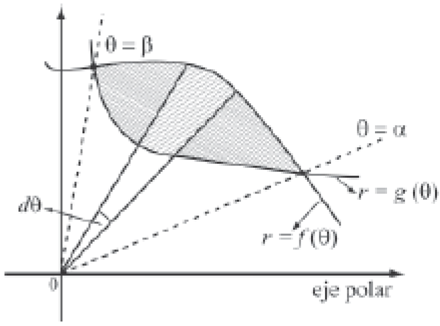



Figura 3.1: área entre curvas en coordenadas polares.

Usaremos la aproximación en forma diferencial para calcular el area. Para ello consideremos el area sombreada como el area de la corona circular de radio exterior $r_\varepsilon = f(\theta)$, radio interior $r_i = g(\theta)$ y ángulo central $d\theta$ (Figura

2.8).

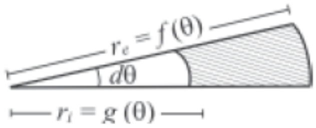



Figura 3.2: Aproximación en forma diferencial para calcular el área.

De acuerdo a la Figura 2.8:

$$dA = \frac{1}{2} r_\varepsilon^2 d\theta - r_i^2 d\theta$$

$$\frac{1}{2}[f^2(\theta) - g^2(\theta)]d\theta$$

Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f^2(\theta) - g^2(\theta)]d\theta \tag{3.1}$$

***Ejemplo* 3.1.** Calcular el área del sector $F$, limitado por la curva $r = 2 + \cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$:

Viendo en la Figura 2.9 y aplicando la propiedad (3.1), se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + 2.\cos\theta + \frac{1 + cos(2\theta)}{2})d\theta$$

$$= \frac{3\pi + 64}{8} u^2$$

***Ejemplo* 3.2.** Calcular el área de la región limitada por la leminiscata $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

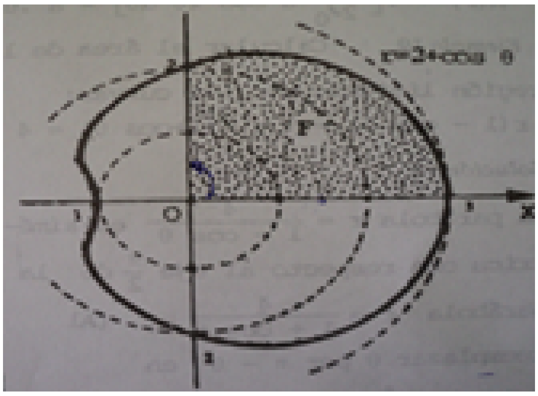



Figura 3.3: Área a encontrar entre las dos rectas que están en coordenadas polares.

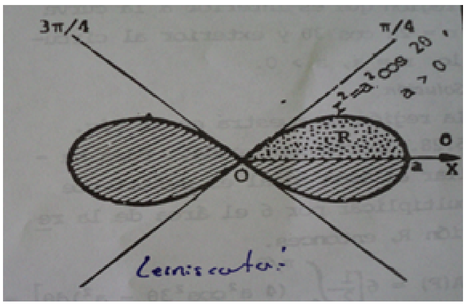



Figura 3.4: Figura en coordenadas polares de la lemniscata,$r^2 = a^2\cos(2\theta)$ .

Viendo en la Figura 10 y aplicando la propiedad (3.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{a^2}{4}.[\text{sen}(2.\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(0)] \\
&= \frac{a^2}{4}.[\text{sen}(\pi) - \text{sen}(0)] \\
&= \frac{a^2}{4}.[1 - 0]
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{4}.u^2$$

***Ejemplo* 3.3.** Calcular el área de la región interior a las curvas, vista en la Figura 2.11:

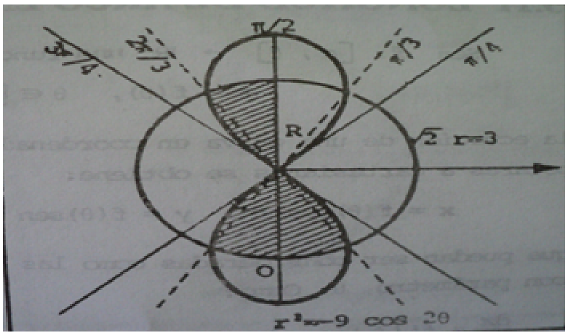



Figura 3.5: Figura de donde se pide hallar el área entre dos curvas en coordenadas polares.

De donde de la Figura 2.11, se obtienen las dos curvas $r = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y $r^2 = -9.\cos(2\theta)$

Aplicando la propiedad (3.1), se obtiene:

$$A = 4.\frac{1}{2}[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-9\cos(2\theta) - \frac{9}{2})d\theta]$$

$$= \frac{3}{2}(6 + \pi - 3\sqrt{3}).u^2$$

# Bibliografía


[1] E. Purcel et al *Cálculo*. Novena Edición, 2007. EEUU.

[2] M, Spivack. *Suplemento del calculo infinitesimal CALCULUS*. España 1994.

[3] Piskunov. *Calculo Diferencial e Integral*. Tercera Edición, Rusia 1977.

[4] *Coordenadas Polares*: accedido el 27 de julio 2014. http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas$_{p}olares$

[5] *Geometría Analítica-Coordenadas Polares*: accedido el 26 de agosto 2014. http://zeth.ciencias.uchile.cl/ manramirez/apuntes/geometria/geometria