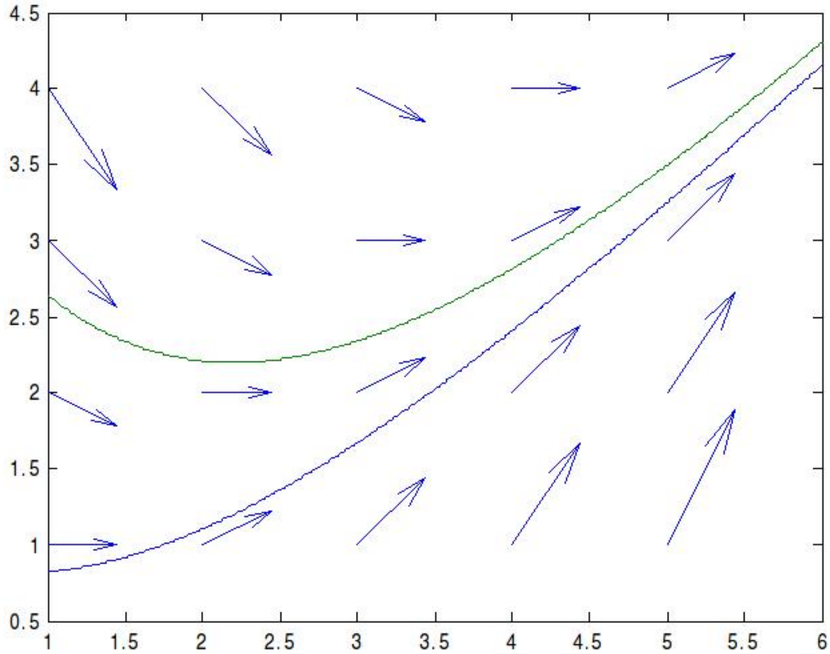
UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

Ley de Creación Nº 29304

Autorizada con Resolución N° 647-2011-CONAFU

Separata de:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN



Lenin Quiñones Huatangari

Índice general

AL ESTUDIANTE

Los temas tratados en este texto son de acuerdo a la programación del curso de Ecuaciones Diferenciales, de las carreras de Ingeniería Civil- Ingeniería Mecánica de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN. Es deseo del autor (profesor del curso) motivar al alumno a leer este texto, pero no que lo lea como si fuera una novela; se debe leer con calma y sin omitir nada. Considerelo un libro de trabajo, con esto se da a entender que las matemáticas se deben leer siempre con lápiz y papel a la mano porque lo más probable es que se tenga que trabajar en los ejemplos y la explicación. Lea todos los ejemplos de la sección antes de intentar alguno de los ejercicios.

La recomendación del autor a sus alumnos es que al leer un ejemplo no vean la solución, traten de resolverlo primero, comparen su trabajo con la solución que se proporciona en el texto y luego resuelvan las diferencias. El autor trató de incluir lo más posible la mayor parte de los pasos importantes en cada ejemplo, pero si algo no esta claro, el alumno siempre debe intentar, y aquí es donde el lápiz y el papel entran de nuevo, para complementar los detalles o los pasos faltantes. Esto no es fácil, pero eso es parte del proceso de aprendizaje. La acumulación de hechos, seguida de lenta acumulación de comprender, simplemente no se puede lograr sin un esfuerzo.

En conclusión el autor le desea al alumno éxitos y al mismo tiempo que disfrute el texto y el curso que va a iniciar. Si el lector tiene comentarios, encuentra errores o si tiene una buena idea para mejorar el texto contacte al autor en *lquinoneshuatangari@unj.edu.pe*.

Capítulo 1:

Nociones Preliminares

Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial, de todos es conocido que, dada una función $f(x)$, su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es una función también que se puede encontrar mediante ciertas reglas. Sea la función $y = e^{-x^3}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2.e^{-x^3}$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2.y$$

El problema al que nos enfrentamos ahora no es el de calcular derivadas de funciones; mas bien, consiste en que si se da una ecuación como $\frac{dy}{dx} = -3x^2.y$, hallar de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga dicha ecuación.

1.1. Definición y Clasificación

DEFINICIÓN 1.1. *Llamamos ecuación diferencial (E.D) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes) y sus derivadas. Si la ecuación contiene deriva-*

das respecto a una sola variable independiente entonces se dice que es una ***ecuación diferencial ordinaria (E.D.O)****; y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama* ***ecuación en derivadas parciales (E.D.P)****.*

***Ejemplo* 1.1.** Son E.D.O las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2$
- $(x + 2y)dx - 3ydy = 0$
- $y'(x) + y(x) = x^2$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0$

***Ejemplo* 1.2.** Mientras que son E.D.P, las siguientes ecuaciones:

- $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

DEFINICIÓN 1.2. *Una EDO lineal de orden n es de la forma*

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots a_1(x)y' + a_0y = Q(x) \tag{1.1}$$

donde las funciones $a_i(x)$, $\forall i \in \{1, \dots n\}$ son llamadas coeficientes de la EDO.

DEFINICIÓN 1.3. *Si $Q(x)$ es identicamente nulo, la EDO lineal se dice Homogenea. Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se dice no homogénea.*

DEFINICIÓN 1.4. *Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x, se dice que la EDO lineal es a coeficientes constantes. De lo contrario se dice que ella es a coeficientes variables.*

En resumen daré la clasificación de la EDO lineal

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^i = Q(x)$$

$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i,\ a_i = cte$	coef. const
$\exists i,\ a_i = a_i(x)$	coef. variab
$a_n = 1$	normalizada

DEFINICIÓN 1.5. *Se llama orden de la ecuación diferencial al orden de la derivada o derivada parcial mas alta que aparece en la ecuación.*

***Ejemplo* 1.3.** Encontrar el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} &y' = 3xy && \text{orden } 1 \\ &y'' + y' = \cos(x) && \text{orden } 2 \\ &y''' + e^y = x && \text{orden } 3 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.6. *Se llama grado de una ecuación que puede ser escrita como un polinomio en la variable dependiente a la mayor potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.*

***Ejemplo* 1.4.** Encontrar el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} &(y')^3 = 3xy && \text{grado } 3 \\ &y'' + y' = \cos(x) && \text{grado } 1 \\ &(y''')^2 + y^4 = x && \text{grado } 2 \end{aligned}$$

1.2. Solución de una Ecuación Diferencial

Diremos que una función es solución de una ED, cuándo al reemplazar esta y sus derivadas de orden superior requeridas cumplen con la ecuación planteada.

***Ejemplo* 1.5.** Verificar que la función $y_1 = e^x$ es solución de la ED

$$y'' - y = 0$$

.

Sea $y_1 = e^x$ derivando se obtiene, $y_1' = e^x$ y esta función a su vez se obtiene $y_1'' = e^x$.
reemplazando en $y_1'' - y_1 = e^x - e^x = 0$
$\therefore y_1$ es una solución de la ED $y'' - y = 0$.

***Ejemplo* 1.6.** Verificar que

$$y = \varphi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$$

es solución de la E.D, $y' + 2xy = 1$.

1.3. Origen de las E.D.O

Las E.D son la piedra angular de las disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía.

***Ejemplo* 1.7.** Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Hallar la E.D que modela dicha ley.

Sea:

T: Temperatura de la sustancia en el instante t.

T_a: Temperatura del aire.

$\frac{dT}{dt}$: La velocidad a la que se enfría una sustancia.

De la condición del problema se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad k > 0$$

que es la E.D pedida donde k es la constante de proporcionalidad. El signo negativo se debe a que la temperatura de la sustancia disminuye al transcurrir el tiempo.

***Ejemplo* 1.8.** Si $y(t)$ denota el número de bacterias en una colonia en función del tiempo, la ecuación diferencial

$$y'(t) = \sigma y(t)$$

donde σ es una constante positiva, expresa que el aumento de la población bacteriana, representada por la derivada y', es proporcional a la propia población y, esto es, mientras más bacterias hay, más rápido a ellas se multiplican. La solución de una ecuación diferencial es una función y no un número, a diferencia de las ecuaciones algebraicas. En este ejemplo se trata de encontrar la función $y(t)$: número de bacterias en función del tiempo. Una posible solución es la función:

$$y(t) = y_0 e^{\sigma t}$$

donde y_0 es el número inicial de bacterias en $t = 0$. Este tipo de soluciones exponenciales aparecerán recurrentemente en la teoría y en la práctica.

1.4. Ejercicios Propuestos

1. **Complete la siguiente tabla:**

Ecuación Diferencial	**EDO o EDP**	**Orden**	**Var.Ind**	**Var.Dep**
$y' = x^2 + 5y$				
$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$				
$\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U}{\partial y}$				
$y'' + xy = \operatorname{sen}(y'')$				
$(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$				
$\dfrac{dr}{d\phi} = \sqrt{r\phi}$				
$\dfrac{d^2x}{dy^2} - 3x = \operatorname{sen}(y)$				
$\left(\dfrac{d^3s}{dt^3}\right)^3 + \left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$				
$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sqrt[3]{\dfrac{\partial V}{\partial y}}$				
$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$				

2. **Determine m para que la función:**

   a) $y = x^m$ sea solución de $x^2y'' - y = 0$

   b) $y = x^m$ sea solución de $x2y'' + 6xy' + 4y = 0$

   c) $y = e^{mx}$ sea solución de $y'' - 3y' + 2 = 0$

   Si encuentra más de un valor, compruebe que cualquier combinación lineal también es solución.

3. **Compruebe que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas:**

   a) $y = -\frac{1}{2}x^2e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe{-}x;\ \ y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x}$

   b) $y = \dfrac{C}{\cos(x)};\ \ y' - y\tan(x) = 0$

   c) $y = \ln(C + e^x);\ \ y' = e^{x-y}$

   d) $y = \sqrt{x^2 - Cx};\ \ (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

   e) $x = ye^{Cy+1};\ \ y' = \dfrac{y}{x(\ln(x) - (y))}$

   f) $y = \tan(x);\ \ y' = 1 + y^2$

   g) $y = e^x - e^{-1} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x);\ \ y'' - y = \operatorname{sen}(x)$.

   h) $y = \operatorname{senh}(x);\ \ xy'' - y' - 4x^3y = 0$

   i) $y = \operatorname{arc\,sen}(xy);\ \ y'(1 - x^2y^2 - x) = y$

   j) $x + y = \arctan(y);\ \ 1 + y^2 + y^2y' = 0$

4. **Encuentre una ecuación diferencial de:**

   a) Crecimiento demográfico.

   b) Reacciones Quimicas.

   c) Osmosis.

   d) Circuitos en serie.

   e) Caída Libre.

   f) Gravitación Universal.

Capítulo 2:
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En este segundo capítulo se estudiará técnicas que que nos permitirá determinar las soluciones de una gran cantidad de EDO. Comenzaremos por analizar cinco tipos de ecuaciones de primer orden que denominaré elementales (Integración directa, variables separables, exactas, lineal de primer orden homogénea y no homogenea). Posteriormente se estudiará algunas otras ecuaciones de primer orden que pueden reducirse a estos casos elementales.

Nos enfocaremos en la resolución de las ecuaciones y no seré demasiado riguroso en los aspectos teóricos o que justifican los cálculos, tales como (existencia, unicidad, regularidad de la solución). Para resolver los casos elementales, será útil el cálculo de integrales y recordar el conocido Teorema Fundamental del Cálculo.

2.1. Integración Directa

Consideramos una EDO del tipo $y' = f(x)$ es integrable gracias al TFC (Teorema Fundamental del Calculo) las soluciones existen y están dadas por:

$$y = \int f(x).dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Supongamos ahora que queremos encontrar la solución definida sobre un intervalo I y que además pasa por cierto punto (x_0, y_0) dado. Esto es, queremos resolver el problema de Cauchy:

$$\text{Problema de Cauchy} \quad \begin{cases} y'(x) = f(x), & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Integrando la ecuación $y' = f(x)$ entre x_0 y $x \in I$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

del T.F.C se tiene que:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

***Ejemplo* 2.1.** sea la ecuación diferencial $y' = \operatorname{sen}(x)$, puesto que se puede aplicar la integración directa, de donde se obtiene:

$$y = -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De manera análoga para $y' = x$, se obtiene que

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2.2. Variables Separables

Una EDO en variables separables tiene la forma $y' = f(x)g(y)$ lo primero observamos es que si $g(y_0) = 0$ entonces la función constante $y(x) = y_0$ define una solución de la EDO. Para los valores de y, donde $g(y) \neq 0$, se tiene

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Integrando y usando cambio de variables

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + \ \ c$$

Si G es una primitiva de $\dfrac{1}{g(y)}$, además F es primitiva de $f(x)$, entonces

$$G(y) = F(x) + c$$

***Ejemplo* 2.2.** Resolver $(1 + x)dy - yd(x) = 0$.

Despejando las funciones y las diferenciales adecuadamente, obtendremos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x|$$

$$y = e^{\ln|1+x|+c_1}$$

$$y = |1 + x|\, e^{c_1}$$

$$y = \pm e^{c_1}\, |1 + x|$$

$$y = K.(1 + x), \quad K \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ la función $y = K.(1 + x)$ es solución de la ED $(1 + x)dy - yd(x) = 0$.

***Ejemplo* 2.3.** Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$$

Haciendo el mismo procedimiento anterior, obtendremos $x^2 + y^2 = 25$.

***Ejemplo* 2.4.** Sea la ED $y' = xy$, de forma analoga al primer ejemplo, se tiene que $y = K.e^{\frac{x^2}{2}}$.

2.3. Exactas

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial escrita de la siguiente manera $ydx + xdy = 0$. Esta misma ecuación la podemos escribir como una diferencial total $d(x.y) = 0$. La cual puede ser facilmente reducida, integrando adecuadamente resulta

$$xy = K \ , \ \ K \in \mathbb{R}$$

Teniendo esto en mente nos podemos hacer la siguiente pregunta:
¿Será posible construir un método general para resolver este tipo de ecuaciones? Sí.. XDDD.

Si $z = f(x, y)$, la diferencial es $dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$. Sea $z = c$, $f(x, y) = c$, teniendo en cuenta la ecuación anterior y al reemplazar z se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}y = 0$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

TEOREMA 2.1. *Sean continuas $M(x,y)$, $N(x,y)$, con derivadas parciales continuas en una región rectangular R, definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es que se debe cumplir*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

***Ejemplo* 2.5.** Resolver $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$.

Como primer paso tenemos que identificar $M(x,y)$, $N(x,y)$, además de comprobar la condición necesaria y suficiente, es decir:
$M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - 1$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En consecuencia, la ecuación es exacta, y existe una función $f(x,y)$ talque:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = x^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones se obtiene

$$f(x,y) = x^2y + g(y)$$

Determinamos la derivada parcial con respecto a y, igualamos el resultado a $N(x,y)$ y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$

$\therefore g'(y) = 1$, de donde al integrar se obtiene $g(y) = -y$. Luego al reemplazar adecuadamente se tiene que la solución general de la ecuación es

$$x^2y - y = c$$

***Ejemplo* 2.6.** Resolver $(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{y} - x\cos(xy) + 2y)dy = 0$.

De forma analoga al ejercicio anterior $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Para cambiar el orden para llegar a la solución, empezaremos con la hipotesis que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y$$

$$f(x,y) = 2x\int e^{2y}dy - x\int \cos(xy)dy + 2\int ydy$$

$$f(x,y) = xe^{2y} - \operatorname{sen}(xy) + y^2 + c = 0$$

***Ejemplo* 2.7.** Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} (\cos x.\operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Desarrollando de forma analoga se obtiene por respuesta a

$$y^2(1-x^2) - \cos^2(x) = 3.$$

2.4. EDO Lineal Primer Orden: Caso Homogeneo

Se tiene la EDO $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, normalizando la ED, dividiendo por el coeficiente $a_1(x)$, $\bar{a_0} = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}, \neq 0$, se obtiene

$$y' = -\bar{a_0}(x).y$$

Para desarrollar este tipo de ecuación se la puede resolver de dos formas:

- Variables Separables.
- Factor Integrante.

2.4.1. Variables Separables

Claramente la función nula $y(x) = 0$ define una solución para esta EDO. Para $y \neq 0$, $y' = f(x)g(y)$. Donde $f(x) = -\bar{a}_0(x)$ y $g(y) = y$. De esta manera:

$$\ln|y| = \int -\bar{a}_0(x)dx + c$$
$$y = k.exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right), \quad k > 0$$

2.4.2. Factor Integrante

Se Define el factor
$$u(x) = exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$
se observa que $u'(x) = \bar{a}_0.u(x)$, si multiplicamos la ecuación por $u(x)$

$$u(x)y'(x) + \bar{a}_0.u(x).y(x) = 0$$

$$u(x)y'(x) + u'(x).y(x) = 0$$

$$(u(x).y)' = 0$$
$$y(x) = \frac{k}{u(x)} = k.exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

***Ejemplo* 2.8.** Resolver la siguiente ED, $y'.\cos x + \dfrac{1}{\cos x}.y = 0, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Usaremos el metodo de la separación de variables
$$y' + \frac{1}{\cos^2 x}.y = 0$$
$$y' = -y.\sec^2(x)$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int -\sec^2(x)dx + c$$
$$\ln(|y|) = -\operatorname{tg} x + c$$

$$y = k.exp(-\operatorname{tg} x), \quad k \in \mathbb{R}$$

2.5. EDO lineal primer Orden: Caso no Homogeneo

Se tiene la ecuación $a_1(y)+a_0(x).y = Q(x)$, si $a_1(x) \neq 0$, podemos normalizar $\bar{a}_0(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $\bar{Q}(x) = \dfrac{Q(x)}{a_1(x)}$ y reescribir la ecuación por el factor integrante

$$u(x) = exp\left(\int \bar{a}_0(x).dx\right)$$

obtenemos:-

$$(u(x).y(x))' = u(x).\bar{Q}(x)$$

$$u(x).y(x) = \int u(x).\bar{Q}.dx + c$$

$$y(x) = \frac{c}{u(x)} + \frac{1}{u(x)}\int u(x).\bar{Q}(x)dx$$

DEFINICIÓN 2.1. *El primer término del lado derecho*

$$y_h(c) = \frac{c}{u(x)} = c.exp\left(-\int \bar{a}_0(x).dx\right)$$

Se denomina solución homogenea. Aunque se habla de la solución homogenea, en realidad se trata de una familia de soluciones, indexadas por la constante c.

DEFINICIÓN 2.2. *El segundo término en el lado derecho de*

$$y_p(x) = \frac{1}{u(x)}\int u(x).\bar{Q}(x)dx$$

$$y_p(x) = exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)\int exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)\bar{Q}(x)dx$$

Se denomina solución particular (que se obtiene si $c = 0$). Se habla de la solución particular.

***Ejemplo* 2.9.** Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.
Hallando el factor integrante:

$$u(x) = exp\left(\int -4x.dx\right)$$

$$u(x) = x^{-4}$$

Reemplazando en la solución homogenea.

$$y_h(c) = \frac{c}{x^{-4}} = cx^4$$

Reemplazando en la solución particular.

$$y_p(x) = x^4 \int x^{-4}x^5e^x dx$$

$$y_p(x) = x^4 \int xe^x dx$$

$$y_p(x) = x^5e^x - x^4e^x$$

Luego,se obtiene por respuesta a $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

2.6. Ecuaciones Diferenciales Homogeneas

Una función $F(x, y)$ es homogenea de orden n, si para todo $\lambda > 0$ se cumple la relación

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n.F(x, y)$$

***Ejemplo* 2.10.** Analizar si las siguientes funciones son homogeneas y de que orden.

- $F(x, y) = x^2 + y^2$, es homogenea de orden 2.
- $F(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{x}$ no es homogenea.

- $F(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{y^4}$ es homogenea de orden cero.

Toda ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Se llama ecuación diferencial homogenea si la función $f(x, y)$ es homogenea de orden cero. De una forma equivalente, toda ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Será homogenea sii, las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogeneas del mismo orden.
Toda ecuación diferencial homogenea se reduce a una ecuación diferencial con variables separables mediante la sustitución

$$y = z(x).x$$

***Ejemplo* 2.11.** Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(y^2 + xy - x^2)dx - x^2.dy = 0$$

Sea $M(x, y) = y^2 + xy - y^2$, $N(x, y) = -x^2$ homogeneas de orden 2. Hagamos la sustitución:

$y = z.x \to dy = dz.x + z.dx$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$(z^2.x^2 + z.x^2 - x^2)dx - x^2.(dz.x + zdx) = 0$$

Factorizando:

$$x^2[(z^2 + z - 1 - z)dx - xdz] = 0$$

Suponiendo que $x^2 \neq 0$

$$(z^2 + z - 1 - z)dx - x.dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln c$$
$$\ln x + \frac{1}{2}.\ln|z+1| - \frac{1}{2}.\ln|z-1| = \frac{1}{2}\ln c$$

Utilizando propiedades de logaritmos obtenemos

$$\ln\left|\frac{x^2(z+1)}{c(z-1)}\right| = 0$$

$$x^2(z+1) = c(z-1)$$

Recordando que $y = z.x$

$$x^2\left(\frac{y}{x}+1\right) = c\left(\frac{y}{x}-1\right)$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$x^2(y+x) = c(y-x)$$

2.7. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, n \neq 1$$

Sea el cambio de variable $z = y^{1-n}$, entonces $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando $(1-n)y^n$ a ambos lados de la ecuación, queda:

$$(1-n)y^{-n}y' + p(x).(1-n)y^{1-n} = (1-n)q(x)$$

$$z' + p(x)(1-n).z = (1-n)q(x)$$

Que resulta ser una ecuación lineal no homogenea de primer orden normalizada.

***Ejemplo* 2.12.** Resolver $2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy^3$

Lo que es equivalente $y' + \dfrac{2y}{2x} = \dfrac{y^3}{2}$.
Sea $z = y^{-2}$, entonces $z' = -2y^{-3}.y'$. Multiplicando $-2y^{-3}$ a ambos lados de la ecuación queda:

$$-2y^3.y' + \frac{1}{x}.y.(-2y^{-3}) = \left(\frac{y^3}{2}\right)(-2y^{-3})$$

$$z' + \frac{1}{x}.y^{-2}(-2) = -1$$

$$z' - \frac{2}{x}.z = -1$$

Donde el factor integrante es

$$u(x) = e^{\left(\int \frac{-2}{x} dx\right)} \Rightarrow u(x) = e^{-2.\ln x}$$

$$u(x) = e^{\ln x^{-2}}$$

$$u(x) = \frac{1}{x^2}$$

$u'(x) = -2.x^{-3}$, multiplicando en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{1}{x^2}.z' - \frac{2}{x^3}.z = \frac{1}{x^2}$$

$$u(x).z' - \frac{2}{x^3}.z = \frac{1}{x^2}$$

$$(u(x).z)' = \frac{1}{x^2}$$

de donde se obtiene

$$u(x).z = \int x^2.dx + c$$

$$z = \frac{c}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-2}}.\frac{x^3}{3}$$

$$z = c.x^2 + \frac{1}{3}x$$

2.8. Ecuación de Riccati

Consideramos la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x).y + r(x)$$

Se hace cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z}$ donde y_1 es alguna solución conocida. Derivando con respecto a x y reemplazar en la ED, que nos va a resultar una EDO lineal de primer orden no homogenea en la variable z.

***Ejemplo* 2.13.**

$$y + y^2 = x^2 - 2x, \quad y_1(x) = -x + 1$$

Luego de hacer el cambio de variable se tiene, $y = -1 - \frac{z'}{z^2}$, reemplazando estas expresiones en la ED, obtendremos

$$\left(-1 - \frac{z'}{z^2}\right) = -\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + x^2 - 2x$$

operando adecuadamente es equivalente a

$$z' - \frac{2}{x}.z = -1$$

La ecuación anterior es una ED tipo elemental visto en una sección anterior y pueden resolver sin ningun inconveniente.

2.9. Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes ecuaciones con integración directa:

   (a) $(x^2-1)y' = 2$.

   (b) $y' = \ln(x), \;\; x > 0$.

   (c) $(1+x^2)y' = \arctan(x)$.

   (d) $y' = x\,\mathrm{sen}(x)$.

   (e) $y' = e^x \cos(x)$.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

   (a) $xy' + y = y^{-2}$.

   (b) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$.

   (c) $x^2y' + y^2 = xy$.

   (d) $x^2y' - 2xy = 3y^4$.

3. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogeneas y resuélvalas:

   (a) $4x - 3y + y'(2y-3x) = 0$.

   (b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

   (c) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$.

   (d) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

   (e) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

4. En las siguientes Ecuaciones de Riccati, verifique que y_1 es solución de la E.D. Luego resuelvalas:

(a) $y' = 2x^2 + \dfrac{y}{x} - 2y^2; \quad y_1(x) = x$

(b) $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x; \quad y_1(x) = 1.$

(c) $y' = -y^2 + xy + 1; \quad y_1(x) = x.$

(d) $y' = 1 - x - y + xy^2; \quad y_1(x) = 1.$

(e) $y' = -8xy^2 + 4x(x+1)y - (8x^3 + 4x^2 + 1); \quad y_1(x) = x.$

(f) $2\cos(x)y' = 2\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2 + y^2; \quad y_1(x) = \operatorname{sen}(x).$

(g) $x^2y' - 2xy + x^2 + y^2 + 2 = 0; \quad y_1(x) = x^k, k \ \textit{por hallar}.$

(h) $y' = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2; \quad y_1(x) = \dfrac{k}{x}, \ k \ \textit{por hallar}.$

5. Utilice el cambio de variables sugerido para transformar la ecuación dada en una ecuación elemental y resuélvala:

(a) $xy' = x + y; \quad y = wx.$

(b) $4x^2y'' + 8xy' + y = 0 \ \textit{en} \ (0, \infty); \quad x = e^u, \quad z(u) = y\left(e^u\right).$

(c) $y' = (x+y)(x+y+1)^{-1} \quad z = x + y.$

(d) $yy'' = (y')^2; \quad p = y'.$

6. Muestre que una ecuación diferencial de la forma

$$y = f(ax + by + c) \ \textit{con} \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Se puede reducir a una ED con variables separables.

7. Resuelva:

(a) $y' = (x+y)^{\frac{-1}{2}}.$

(b) $y' - 2xy = 2x(e^z)^2.$

(c) $x\ln(x)y' - (1 + \ln(x))y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln(x)) = 0.$

(d) $(x^3 - x^2 + x - 1)y' = x^2 - 2x - 1$.

8. El peso de un ser humano desde el nacimiento hasta la muerte puede modelarse por la ecuación de Gompertz

$$\frac{dW}{dt} = (a - b\ln(W))W$$

donde a y b son constantes apropiadas no nulas. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga la condición inicial $W(0) = W_0 > 0$

Bibliografía

[1] D,Zill. *Ecuaciones Diferenenciales con Aplicaciones de Modelado.* THOMSON EDITORES Sexta Edición.

[2] M, Spiegel. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* PRENTICE-HALL Tercera Edición, México 1983.

[3] J, García y M, Guía. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Universidad Autónoma de Guanajuato, Mexico 2007.

[4] Departamento de Matemáticas. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales.* UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA, España 2010.

[5] J, Sotomayor. *Lições de Ecuações Diferenciais Ordinárias.* IMPA, 1979.

[6] J, Escobar. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones en Maple.* Universidad de Antioquia. España 2010

[7] J, Varona. *Métodos Clásicos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* UNIVERSIDAD LA RIOJA, España 1996.

[8] A, Osses. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Universidad de Chile, Chile 2013.

[9] E, Ramos. *Ecuaciones Diferenciales. Aplicaciones.* QUINTA EDICIÓN, Perú 1996.