UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

INGENERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

PROBABILIDAD Y VARIABLE ALEATORIA

Autores: Mg. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaria
Dra. Marcela Yvone Saldaña Miranda
Mg. Mario Félix Olivera Aldana

Ciclo Académico: 2024_I

JAÉN – PERÚ, JULIO, 2024

Probabilidad y Variable Aleatoria

Logro: El estudiante emplea la teoría de probabilidad para la tomar decisiones fundamentales utilizando información histórica como base

Objetivos: Conocer las teorías de probabilidades

Determinar el cálculo de probabilidades aplicando la teoría

Identificar la variable aleatoria continúa utilizando las tablas estadísticas

Contenidos de la unidad:

- Introducción a la Probabilidad: incluye definiciones fundamentales como concepto de probabilidad, experimento aleatorio, espacio muestral y eventos.
- Operaciones con eventos utilizando tablas de contingencia.
- Métodos para calcular probabilidades
- Variable aleatoria continua.

Índice

Introducción

La teoría de la probabilidad y las variables aleatorias constituyen un campo fundamental en las matemáticas aplicadas y en numerosas disciplinas científicas y de ingeniería. Este manual tiene como objetivo proporcionar a los lectores una comprensión sólida de estos conceptos, desde los fundamentos básicos hasta aplicaciones más avanzadas.

En este manual, exploraremos la naturaleza aleatoria de eventos y fenómenos, así como las herramientas matemáticas utilizadas para describir y modelar su comportamiento. Comenzaremos con una introducción a los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, incluyendo la definición de experimentos aleatorios, espacios muestrales y eventos. A partir de ahí, nos profundizaremos en el estudio de variables aleatorias, tanto discretas como continuas, y examinaremos las distribuciones de probabilidad asociadas con ellas con el apoyo de las tablas estadísticas.

A lo largo del manual, se presentan ejemplos prácticos y aplicaciones en una variedad de campos, desde la física y la ingeniería, con el fin de ilustrar cómo la teoría de la probabilidad y las variables aleatorias se utilizan para abordar problemas del mundo real.

Este manual está diseñado para ser una guía accesible y completa para estudiantes, investigadores y profesionales interesados en la teoría de la probabilidad y su aplicación en el análisis de datos y la toma de decisiones.

Sin más preámbulos, ¡comencemos nuestro viaje hacia el fascinante mundo de la aleatoriedad y la incertidumbre!

Los autores

Probabilidad y Variable Aleatoria

1. Conceptos básicos

1.1. Experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es un procedimiento que, al llevarse a cabo en múltiples ocasiones bajo condiciones idénticas, genera resultados diversos y no previsibles con anticipación.

1.2. Experimento determinístico

Es un procedimiento en el cual es posible anticipar el resultado de su ejecución, ya que existe una ley o fórmula matemática que lo explica de manera precisa. Los experimentos físicos son determinísticos, lo que implica que pueden preverse y calcularse con exactitud. Un ejemplo es el movimiento de caída libre, cuyo comportamiento se describe mediante ecuaciones y leyes físicas, permitiendo la predicción precisa de sus resultados en cualquier situación particular.

1.3. Espacio muestral

Es la colección que abarca todas las posibles consecuencias que pueden suceder en un experimento aleatorio. Se expresa de forma simbólica, y cada elemento dentro de este espacio se denomina punto muestral.

1.4. Evento

Es cualquier subconjunto conformado por elementos pertenecientes al espacio muestral. Normalmente, se utiliza la representación con letras mayúsculas, como A, B, etc.

2. Probabilidad

La probabilidad es una medida cuantitativa que evalúa la posibilidad de que ocurra un evento particular en un experimento aleatorio. Se expresa generalmente como un número entre 0 y 1, donde 0 indica una probabilidad nula (imposibilidad de que ocurra el evento) y 1 indica una probabilidad segura (certeza de que el evento ocurrirá). La probabilidad de un evento se calcula dividiendo el número de casos favorables entre el número total de posibles resultados en el espacio muestral. Esta medida proporciona una base matemática para describir y analizar la incertidumbre asociada con eventos aleatorios.

Se calcula a través de:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Donde:

$n(A)$: representa los casos favorables de ocurrencia del evento A.

$n(\Omega)$: Total de casos favorables

Ejemplo 1.

El experimento aleatorio: Lanzar un dado.

a. Identifique el espacio muestral

b. Identifica los eventos y calcular las probabilidades de:

b.1 Sea el evento A: obtener el número 1

b.2 Sea el evento B: obtener número impar

b.3 Sea el evento C: obtener número par

Solución:

a. El espacio muestral será:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

b. Luego: calculamos los eventos con sus respectivas probabilidades.

$$P(A)=\frac{1}{6}=0.17$$

Interpretación: la probabilidad de obtener el número uno es de 0.17 o 17%

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.50$$

Interpretación: podemos decir, la probabilidad de obtener número impar es de 0.5 o 50%

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.50$$

Interpretación: Por lo tanto, la probabilidad de obtener número par es de 0.5 o 50%

Ejemplo 2.

Mediante una encuesta laborar a 200 ingenieros se encontró que 70 de ellos se dedicaban a construir antenas de internet. Hallar la probabilidad de que al seleccionar a un ingeniero esté sin puesto de trabajo.

Solución:

Evento A: Ingenieros dedicados a la construcción de antenas.

Ω = n: espacio muetral = 200 ingenieros

Reemplazamos y calculamos la probabilidad:

$$P(A) = \frac{70}{200} = 0.65$$

Interpretación: Por lo tanto, la probabilidad de que al seleccionar a un ingeniero y esté sin trabajo es de 0.65 o 65%

Ejemplo 3.

La empresa SOL. S.A.C, dedicada al rubro de la construcción, en el mes de diciembre ganó una licitación para la edificación de un colegio ubicado en el distrito de Bellavista, para la construcción al distribuidor se le solicitó 100 varillas de 5/8; 300 de ½, 400 de 1/8 y 200 de ¾ medidas en pulgadas ¿cuál es la probabilidad que un ingeniero utilice varillas de acero de 5/8?

Solución:

Ω = {varillas de acero de 1/8, ¾,5/8 y ½

n(Ω)=1000 varillas

Evento A: varillas de 5/8

Reemplazamos y calculamos la probabilidad:

$$P(A) = \frac{100}{1000} = 0.10$$

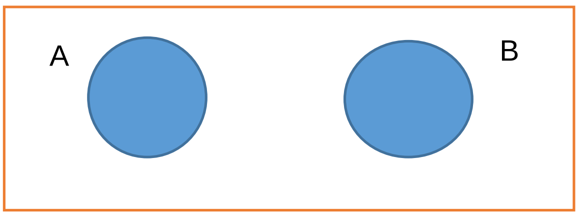
Interpretación: Luego, la probabilidad de usar varillas de 5/8 es de 0.1 o 10%

2.1. Axiomas de la probabilidad

Asimimo Mendenhall et al., (2009)en el marco de un experimento aleatorio que tiene un conjunto de posibles resultados llamado espacio muestral **Ω**, y un evento específico A dentro de ese espacio muestral, la probabilidad del evento A, denotada como P(A), es un valor que cumple con los siguientes principios fundamentales

- Axioma 1: si $0 \le P(A) \le 1$
- Axioma 2: por lo tanto, $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



2.2. Propiedades de la probabilidad

a. La probabilidad del evento imposible es nula $P(\phi)=0$

b. La probabilidad de un evento y la de su complemento suman $P(A)+P(A^C)=1$

c. La probabilidad de cualquier evento, A, es menor o igual que 1: $P(A)\leq 1$

d. Si el evento A es un subconjunto del evento B, entonces: $P(A)\leq P(B)$

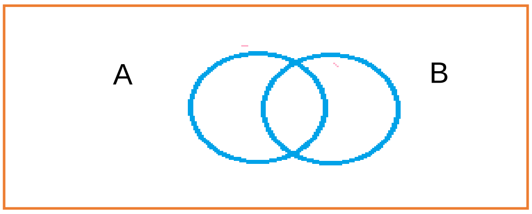
e. Para cualesquiera A y B, evento de Ω: $P(A)=P(A\cap B^C)+P(A\cap B)$

f. Para cualesquiera A y B, eventos de Ω: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

2.3. Teoremas Fundamentales de probabilidad

- $P(\phi)=0$, donde ϕ es el evento imposible.
- $P(A)=1-P(A^C)$
- Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



2.4. Eventos mutuamente excluyentes

Según Triola (2009) nos dice que dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes dentro de un mismo espacio muestral si no pueden suceder simultáneamente. En otras palabras, A y B son eventos excluyentes si no tienen resultados en común, lo que se expresa matemáticamente como la intersección entre ellos siendo un conjunto vacío, es decir, $A \cap B = \emptyset$

Dentro del contexto de la teoría de conjuntos, los eventos mutuamente excluyentes equivalen a conjuntos disjuntos, lo cual indica que no tienen elementos en común

Ejemplo 4.

El experimento

ε : Contar y verificar la cantidad de piezas que conforman un carro.

Solución

Vamos a identificar los eventos de la siguiente manera:

A:la cantidad de piezas revisadas menor que 19 A = {0, 1, 2…, 18}

B: se han revisado exactamente a veinticuatro piezas B = {24}

Dado que la $A \cap B = \phi$, podemos concluir que los eventos son mutuamente excluyentes.

2.5. Reglas de probabilidad

2.5.1. Probabilidad del producto

a. Si los eventos son independientes debe cumplir: $P(B/A) = P(B)$

b. Para calcular la probabilidad conjunta o simultánea de dos o más eventos, son independientes, si la probabilidad de que ocurra ambos eventos simultáneamente es igual al producto de cada una de las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos: Ross (2014)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

c. Si los eventos son independientes sus complementos también

$$(A^C \cap B^C) = P(A^C) \times P(B^C)$$

d. Si A y B son eventos dependientes, entonces la ocurrencia conjunta de los eventos es: $(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

e. Si los eventos A, B y C son dependientes, entonces la ocurrencia conjunta de los eventos es:

$$(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

2.5.2. Probabilidad de la suma

a. Se utiliza cuando se desea averiguar la probabilidad de que ocurra al menos un evento

Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b. Si los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra al menos un evento es:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

c. Si A y B son eventos traslapados o unidos (no mutuamente excluyentes), entonces la probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

d. Los eventos A, B y C son traslapados ocurridos, entonces la probabilidad de que ocurra al menos un evento

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

e. Si A, B y C son independientes, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) * P(B) - P(A) * P(C) - P(B) * P(C) + P(A) * P(B) * P(C)$$

Ejemplo 5.

Una compañía encargada de comercializar servicios eléctricos llevó a cabo un análisis sobre las facturas de clientes en los sectores domiciliario, residencial y comercial. Para ello, realizaron una encuesta a 220 clientes distribuidos en las regiones de costa, sierra y selva del país.

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Condición	**Región**			**Total**
	Costa (*A*)	**Sierra (*B*)**	**Selva (*C*)**	
Domiciliario(*D*)	5	9	60	74
Residencial (*R*)	11	21	75	107
Comercial(C)	4	10	25	39

Se elige un cliente al azar, determinar la probabilidad que:

a. Sea de la región sierra.
b. La factura sea residencial.
c. La factura sea domiciliaria y de la sierra
d. Que el cliente sea de la costa o selva

Para cada consulta, formalice las probabilidades utilizando los eventos correspondientes.

Solución

a. El cliente sea de la sierra: $P(S) = \frac{40}{220} = 0.18$

Interpretación: la probabilidad que sea de la sierra es de 0.18 o 18%

b. La factura sea residencial : $P(R) = \frac{107}{220} = 0.49$

Interpretación: la probabilidad que la factura sea residencial es de 0.49 o 49%

c. La factura sea domiciliara y de la sierra: $P(D \cap S) = \frac{9}{220} = 0.04$

Interpretación: Por lo tanto, la probabilidad que la factura sea domiciliaria y de la sierra es de 0.04 o 4%

d. El cliente sea de la costa o selva: $P(C \cup S) = \frac{20}{220} + \frac{160}{220} = 0.82$

Interpretación: Asimismo, la probabilidad que el cliente sea de la costa o selva es de 0.82 o 82%

Ejemplo 6.

En un proyecto de construcción de carreteras, se ha determinado que la probabilidad de que ocurran problemas con la compactación del suelo es 0.40 y la probabilidad de enfrentar desafíos con la gestión de residuos de construcción es 0.30. Además, se sabe que la probabilidad de que ambos problemas ocurran al mismo tiempo es 0.15. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran problemas con la compactación del suelo o desafíos con la gestión de residuos de construcción?

Solución.

Sean los eventos: A: Problemas con la compactación del suelo.

B: Desafíos con la gestión de residuos de construcción

$A \cap B$: Ocurran ambos eventos A y B al mismo tiempo

Además.

P(A) = 0.40

P(B) = 0.30

P (A ∩ B) = 0.15

Entonces:

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Reemplazamos: $P(AUB) = 0.40 + 0.30 - 0.15$

$P(AUB) = 0.55$

Interpretación: La probabilidad de que ocurran problemas con la compactación del suelo o desafíos con la gestión de residuos de construcción es del 0.55

Ejemplo 7.

En el análisis de riesgos para un proyecto de construcción de un túnel, se determinó que la probabilidad de que ocurra un problema en la estabilidad del suelo es de 0.25, y la probabilidad de que haya dificultades en la ejecución del plan de excavación es de 0.35. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un problema tanto en la estabilidad del suelo como en la ejecución del plan de excavación?

Solución.

Sean los eventos y Probabilidades

A: Estabilidad del suelo P(A) = 0.25

B: Ejecución del plan de excavación P(B) = 0.35

$A \cap B$: Estabilidad del suelos y ejecución del plan de excavación

Aplicamos la fórmula: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Reemplazamos: $P(A \cap B) = 0.25 \times 0.35$

$P(A \cap B) = 0.0875$

Interpretación: La probabilidad de que ocurra un problema tanto en la estabilidad del suelo como en la ejecución del plan de excavación es de 0.0875

Ejemplo 8.

En un proyecto de construcción de una presa, durante el análisis de riesgos, se identificaron dos eventos importantes: la probabilidad de que ocurran problemas en la impermeabilización de la presa es del 0.20, y la probabilidad de que se produzcan filtraciones de agua debido a la calidad del suelo es del 0.15. ¿cuál es la probabilidad que ocurran problemas en la impermeabilización o filtraciones de agua?

Solución

Sean los eventos:

A: Problemas en la impermeabilización

B: Filtraciones de agua

P(A) = 0.20

P(B) = 0.15

Aplicamos la formula $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Reemplazamos: $P(A \cup B) = 0.20 + 0.15$

$P(A \cup B) = 0.35$

Interpretación: La probabilidad que ocurran problemas en la impermeabilización o filtraciones de agua es del 0.35

Ejemplo 9.

En una hidroeléctrica hay 15 trabajadores, 2 son de limpieza, 3 ingenieros eléctricos, 5 de mantenimiento, 2 de seguridad y 7 son ingenieros mecánicos ¿Cuál es la probabilidad que al elegir un trabajador sea ingeniero eléctrico o ingeniero mecánico?

Solución:

Identificamos los eventos.

A: ingeniero mecánico B: ingeniero eléctrico

Aplicamos la formula P (A∪ B) = P(A) + P(B)

Reemplazamos: $P(AUB) = \frac{3}{15} + \frac{7}{15} = 0.67$

Interpretación: la probabilidad de que al elegir un trabajador sea ingeniero eléctrico o ingeniero mecánico es de 0.67 o 67%

3. Probabilidad Condicional

Sánchez(2017) afirma que la probabilidad condicional que ocurra un evento dado que otro evento ha ocurrido. Y se denota como P(A|B) y se lee "la probabilidad de A dado B". Se calcula dividiendo la probabilidad de la intersección de los eventos A y B por la probabilidad del evento condicionante B, esto se define como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde el símbolo /: se lee ``dado que´´ o ``dado que ocurre``, Si, Cuando, Sabiendo

Asimismo:

P (A/B): se lee,” probabilidad que ocurra el evento A, dado ha ocurrido el evento B``.

Ejemplo 10.

En la tabla se muestra a los estudiantes egresados de la UNJ por categoría según sexo.

Distribución de los estudiantes egresados por categoría según sexo

Sexo	Categoría del estudiante egresado			Total
	Bachiller(B)	Titulado(T)	Magister(M)	
Masculino(M)	110	160	40	310
Femenino(F)	60	130	30	220
Total	170	290	70	530

Seleccionamos al azar un egresado, y queremos determinar la probabilidad:

a. Que sea Bachiller

b. Consideremos sea masculino y bachiller

c. Supongamos sea titulado si es de sexo masculino

d. Que sea de género masculino, dado que tenga grado de Magister

e. Sea bachiller o tenga título

f. Sea de sexo femenino si es titulado

Solución:

Tabla de probabilidad de los estudiantes egresados por categoría según sexo

Sexo	Categoría del estudiante egresado			Total
	Bachiller(B)	Titulado(T)	Magister(M)	
Masculino(M)	110/530 =0.21	160/530=0.30	40/530=0.08	310/530=0.59
Femenino(F)	60/530=0.11	130/530=0.25	30/530=0.05	220/530=0.41
Total	170/530=0.32	290/530=0.55	70/530=0.13	530/530=1

Entonces:

a. $P(B)=0.32$

Interpretación: la probabilidad que sea bachiller es de 0.32 o 32%

b. $P(M \cap B)=0.21$

Interpretación: la probabilidad que sea de sexo masculino y bachiller es 0.21 o 21%

c. $P(M/Mg)=\dfrac{P(M \cap Mg)}{P(Mg)}=\dfrac{0.08}{0.13}=0.62$

Interpretación: la probabilidad que sea de sexo masculino dado si es magister es 0.62 o 62%

d. $P(B \cup T)=P(B)+P(T)$

$$=P(0.32)+P(0.55)=0.87$$

Interpretación: la probabilidad que sea bachiller o titulado es 0.87 o 87%

e. $P(F/T)=\dfrac{P(F \cap T)}{P(T)}=\dfrac{0.25}{0.55}=0.45$

Interpretación: la probabilidad que sea femenino si es titulado es 0.45 o 45%

Ejemplo 11.

En un dron encontramos un giroscopio, su probabilidad que este falle es de 0.25; además la probabilidad que falle el sensor de temperatura es de 0.43. La probabilidad que falle el giroscopio cuando el sensor de temperatura lo hace es de 0.37. ¿Hallar la probabilidad que el sensor de temperatura falle cuando el giroscopio lo hace?

Solución:

La probabilidad que falle el giroscopio $P(G) = 0.25$

La probabilidad que falle el sensor de temperatura $P(ST) = 0.43$

La probabilidad que falle el giroscopio cuando el sensor de temperatura lo hace $P(G/ST) = 0.37$

Para calcular la probabilidad que el sensor de temperatura falle cuando el giroscopio lo hace, se calcula primero la intersección.

Calculando la intersección:

$$P(G/ST) = \frac{P(G \cap ST)}{P(ST)}$$

$$0.37 = \frac{P(G \cap ST)}{0.43}$$

$$0.159 = P(G \cap ST)$$

Calcular la probabilidad que el sensor de temperatura falle cuando el giroscopio lo hace lo reemplazamos en la formula.

$$P(ST/G) = \frac{P(ST \cap G)}{P(G)} = \frac{0.159}{0.25} = 0.64$$

Interpretación: la probabilidad que el sensor falle cuando el giroscopio lo hace es 0.64 o 64%

Ejemplo 12.

En la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica se determina que el 50% de las materias de matemáticas, el 60% de las materias de Física II y el 30% de ambas materias están reprobadas. Si se selecciona al azar a un estudiante, y reprobó Física II ¿Cuál es la probabilidad de que repruebe matemáticas?

Solución

Donde:

Probabilidad, materias de matemáticas; P (A) = 0.5

Probabilidad de las materias Física II; P (B) = 0.6

Probabilidad de ambas materias P (A $\cap$ B) = 0.30

Reemplazamos:

$$P(M / FII) = \frac{P(M \cap FII)}{P(FII)} = \frac{0.30}{0.60} = 0.5$$

Interpretación: La probabilidad que repruebe Matemáticas si reprobó Física II es de 0.5 o 50%

4. Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes

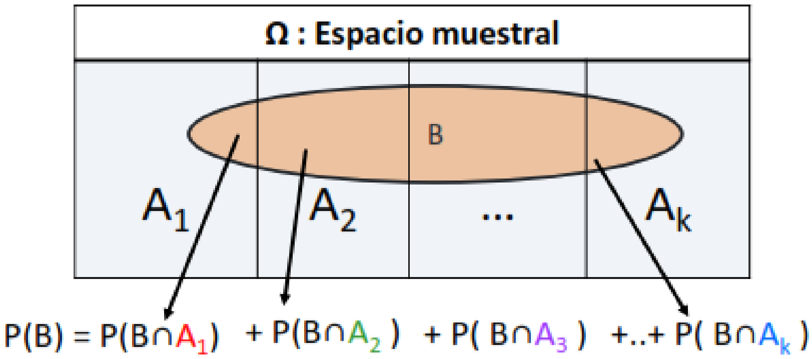
La Partición de un espacio Muestral Ω en un conjunto de K eventos A_1, A_2… A_k que son mutuamente excluyentes y cuya unión es el espacio muestral.Se verifican las siguientes condiciones

$P(A_i) > 0$, para cada $i = 1,2,\ldots,k$ $\quad A_i \cap A_j = \phi \,\forall_{i \neq j}$ según Soto (2011)

$$\text{Además: } \sum_{i=1}^{k} P(B_i) = 1$$

4.1. Probabilidad Total

Calzada (2017) indica, si k eventos A_1, A_2, ……, A_k donde representa una partición del espacio muestral y B es un evento con probabilidad condicional conocida, entonces se calculará la probabilidad de la forma P (B):



Regla de la multiplicación: $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots..$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) * P(B/A_i) \qquad i = 1,2,\ldots..,k$$

4.2. Teorema de Bayes

García-Rojas et al., (2023) al reemplazaren la probabilidad condicional la regla de multiplicación y la probabilidad total es lo siguiente.

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) * P(B/A_i)}{\sum P(A_i) * P(B/A_i)}$$

$$\text{Teorema de Bayes} \quad P(A_i / B) = \frac{P(A_i) * P(B/A_i)}{\sum P(A_i) * P(B/A_i)}$$

Nota: Para la solución se recomienda utilizar al diagrama del árbol.

Donde:

$P(A_i)$	:	Probabilidad a priori
$P(B/A_i)$	:	Probabilidad condicional
$P(B)$	:	Probabilidad Total
$P(A_i/B)$	:	Probabilidad a posterior

Ejemplo 13.

Un ensamblador de computadoras utiliza componentes de tres proveedores: A_1, A_2, A_3. Del total de 2000 componentes recibidos, 1100 proceden de A_1 ,700 de A_2 y la diferencia de A_3. Basándose en experiencias anteriores, el ensamblador sabe que, si las computadoras se seleccionan al azar, las tasas de piezas defectuosas para A_1, A_2 y A_3 son 2%,5%y 7% respectivamente:

a. ¿Cuál es la probabilidad que una computadora contenga una pieza defectuosa?
b. Además, una computadora tiene una pieza defectuosa ¿Cuál es la probabilidad que haya sido suministrada por A_2?

Solución:

Los eventos son:

Ai: los componentes provienen de los proveedores 1,2,3

B: la pieza es defectuosa

Además:

$P(A_1)=\frac{1200}{2000}=0.6$	$P(A_2)=\frac{700}{2000}=0.35$	$P(A_3)=\frac{100}{2000}=0.05$
$P(B/A_1)=0.02$	$P(B/A_2)=0.05$	$P(B/A_3)=0.07$

Esquemáticamente:

				$P(A_i) * P(B/A_i)$
$P(A_1) = 0.6$	A_1	0.02	B	0.6*0.02
$P(A_2) = 0.35$	A_2	0.05	B	0.35*0.05
$P(A_3)=0.05$	A_3	0.07	B	0.05*0.07
	Total		P(B) =	0.033

a. Aplicando la fórmula de probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) * P(B/A_i)$$

$$= P(A_1) * P(B/A_1) + P(A_2) * P(B/A_2) + P(A_3) * P(B/A_3)$$

$$P(B) = 0.6 \times 0.02 + 0.35 \times 0.05 + 0.05 \times 0.07 = 0.033$$

Interpretación: La probabilidad que contenga una parte defectuosa es de 0.033

b. Aplicando el Teorema de Bayes se obtiene:

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2) * P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{0.35 \times 0.05}{0.033} = 0.53$$

Interpretación: que haya sido suministrada por $A_2 = 0.53$

Ejemplo 14.

Un grupo de ingenieros inicia una obra de construcción de un puente en Puerto Ciruelo, un análisis para ver los beneficios que traerá esta obra para este Distrito, arrojo que la probabilidad de que el empleo aumente en el puerto es de 0.74, que el consumo de víveres aumente es de 0.25 y que aumente el consumo de víveres dado el aumento de empleos es de 0.13. ¿Cuál es la probabilidad de que se aumente el empleo y el consumo de víveres debido a la realización de esta obra?

Solución:

Probabilidad de aumento de empleo $P(AE) = 0.74$

La probabilidad de aumento de consumo de víveres $P(AV) = 0.25$

Probabilidad del consumo de víveres dado al aumento de empleo

$P(AV / AE) = 0.13$

Se calcula:

$$P(AE \cap AV) = P(AE) \times P(AV / AE)$$
$$= 0.74 \times 0.13 = 0.10$$

Interpretación: La probabilidad de que el empleo y el consumo de víveres aumente debido a la realización de esta obra es de 0.10 o 10%.

Ejemplo 15.

En un viaje de negocios para una constructora, van 150 empleados, 60 de los que van son ingenieros, 50 son arquitectos y 25 tienen como profesión ambas carreras. Se elige un empleado al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado tenga al menos una de las dos carreras?
b. Si se sabe que es arquitecto ¿Cuál es la probabilidad de que también sea Ingeniero?
c. ¿Qué sea ingeniero y que no sea arquitecto son eventos independientes?

	Son arquitectos	No son arquitectos	Total
Son ingenieros	25	35	60
No son ingenieros	25	65	90
Total	50	100	150

a. Identificamos las probabilidades

$$P(I) = \frac{60}{150} = 0.4$$

$$P(A) = \frac{50}{150} = 0.33$$

$$P(A \cap I) = \frac{25}{150} = 0.17$$

Piden:

$$P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I)$$
$$= 0.33 + 0.4 - 0.17 = 0.56$$

Interpretación: La probabilidad de que el empleado hable los dos idiomas es de 0.56 o 56%

b. Se calcula:

$$P\left(\frac{I}{A}\right)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)}=\frac{0.17}{0.33}=0.52$$

Interpretación: La probabilidad que sea ingeniero sabiendo que es arquitecto es de 0.52 o 52%

c. $P(I)=0.4$

$P(NA)=0.67$

Entonces: Si son independientes se debería cumplir:

$$P(I\cap NA)=P(I)\times P(NA)$$

$$0.23=0.4\times 0.67$$

$$0.23\neq 0.27$$

Interpretación: Por lo tanto, no son independientes.

5. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una forma de representar numéricamente los resultados de un experimento aleatorio, donde cada resultado del experimento se asigna a un valor numérico. Esta asignación determina el valor numérico de la variable aleatoria en función del resultado del experimento. Las variables aleatorias pueden tomar valores discretos o continuos, según la naturaleza de los valores numéricos que pueden asumir. Se utilizan letras mayúsculas (como X, Y, Z) para designar las variables aleatorias y letras minúsculas (como x, y, z) para representar sus valores correspondientes.

$$X:\Omega\rightarrow\Re$$

5.1. Rango:

Conocido como recorrido, se refiere al conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria *X*. Se representa con la notación R_X.

Ejemplo 16.

Tomemos como ejemplo un experimento aleatorio que consiste la realización de un partido de fútbol.

- Si se define la variable aleatoria *X* como el tiempo registrado hasta que se meta el primer gol, entonces el rango o recorrido es $R_x=\{x\in\Re/0<x\leq 90\}$

- Si se define la variable aleatoria X como el número de goles que se mete en el partido, entonces el rango o recorrido es $R_X = \{0, 1, 2, 3\ldots\}$
- Si definimos la variable aleatoria X como la cantidad de tarjetas amarillas que un jugador específico recibe, entonces el conjunto de valores posibles o recorrido es RX = {0, 1, 2}.

5.2. Variable aleatoria continua: Distribución normal

O llamada gaussiana, es una de las distribuciones de probabilidad fundamentales para variables aleatorias continuas. Y se caracteriza por su forma de campana simétrica y se define por dos parámetros: la media (μ) y la desviación estándar (σ). Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de una distribución normal está determinada en estos parámetros y representa la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor específico.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde:

x : variable aleatoria
μ : media
σ : desviación estándar
e : base del logaritmo natural

5.2.1. Características

- Simetría: La distribución normal es simétrica en relación con su media μ
- Distribución de probabilidad infinita: La cola de la distribución se extiende indefinidamente en ambas direcciones
- La mayor densidad de probabilidad se concentra alrededor de la media y va disminuyendo conforme nos alejamos de ella.
- La forma precisa de la curva de campana está determinada por los valores: media y la desviación estándar.
- Se caracteriza por tener una media igual μ a 0 y desviación estándar σ igual a 1
- El rango de la variable normal abarca toda la recta real, incluyendo valores desde el $-\propto$ a $+\propto$

- Las colas de la distribución normal nunca intersectan el eje horizontal, X

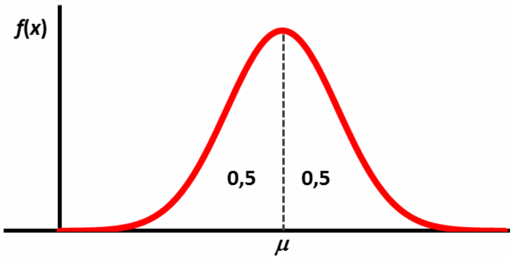


Figura 1. Características

5.2.2. Propiedades

a. La suma de variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal también sigue una distribución normal.
b. Es una distribución estable, lo que significa que su forma se mantiene después de sumar o multiplicar varias variables aleatorias que siguen esta distribución

La distribución normal es muy empleada en diversas áreas debido a su simplicidad y a que muchos fenómenos naturales y procesos en la vida real tienden a distribuirse de manera aproximadamente normal. Esto la convierte en una herramienta fundamental en inferencia estadística, modelado y análisis de datos

5.2.3. Proceso de Estandarización

Se analiza la distancia entre un valor específico x y la media μ =0 en términos de la desviación estándar σ =1, como se ilustra a continuación, :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

5.3.2.1. Notación

Indica que la variable Z sigue una distribución normal estándar con media igual a 0 y una varianza igual a 1. Y se denota Z ~ N (0,1)

5.3.2.2. Función Acumulada

$$F(Z) = P(Z \leq z)$$

A continuación, se muestran las diferentes situaciones o casos (Ver Figura 2) : Por consiguiente , la distribución de la variable Z está registrada en la tabla de la distribución normal estándar.

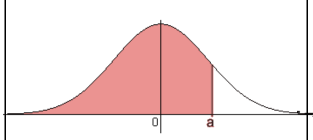
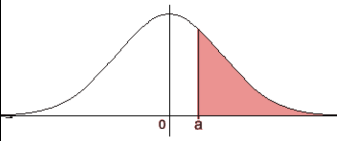
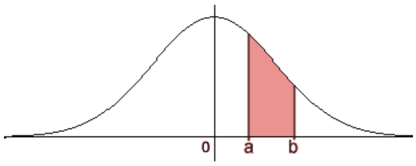
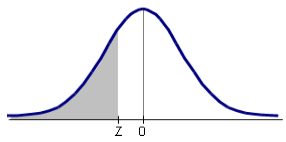
Caso 1	Caso 2	Caso 3
$P(Z \leq a) =$ se ubica directo en la tabla	$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$	$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$
		

Figura 2. Aplicando las propiedades

TABLA QUE MUESTRA LOS VALORES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR

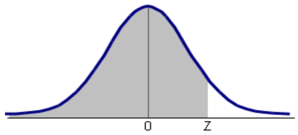
El área debajo de la curva de la distribución normal:
$P(Z \leq z) = \alpha$



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

TABLA QUE MUESTRA LOS VALORES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR

El área bajo la curva de la distribución normal:
$P(Z \leq z) = \alpha$



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Ejemplo 17.

1. **Para una distribución normal estándar.**
   a. Cuál es la probabilidad que la variable aleatoria Z sea menor a 1.31

   Solución: ubicamos el valor directo en la tabla z

   $P(Z \leq 1.31) = 0.90490$

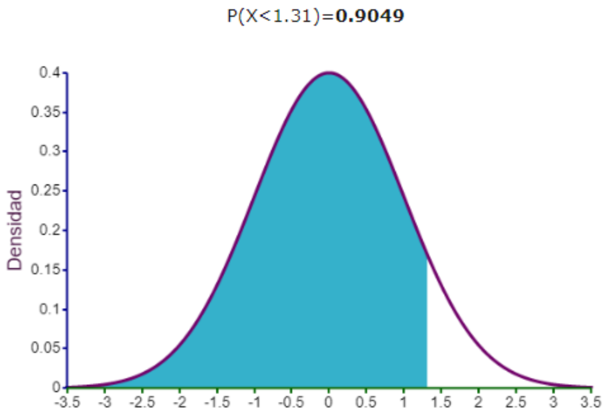


Figura 3. Representando en su gráfica

   b. Cuál es la probabilidad que Z sea mayor que 2.35

   Solución: aplicando la propiedad

$$P(Z \geq 2.35) = 1 - P[´Z \leq 2.35]$$
$$= 1 - P[´Z \leq 0.99061]$$
$$= 0.0094$$

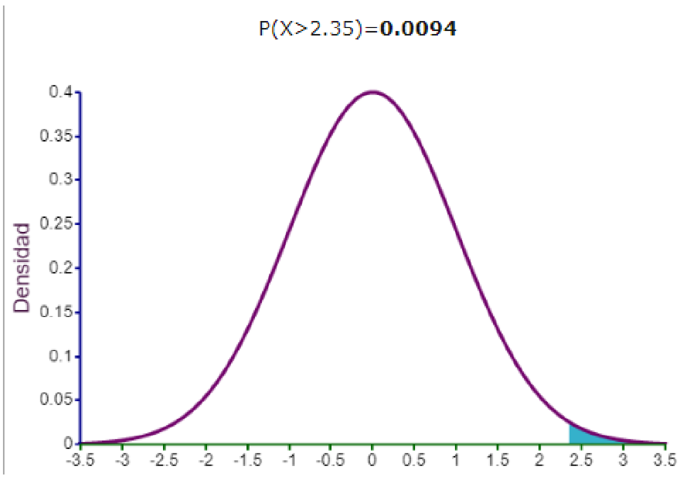


Figura 4. Representando en su gráfica

c. Calcular la probabilidad que Z sea menor que -0.03

Solución: ubicamos el valor directo en la tabla z

$P(Z \leq -0.03) = 0.4880$

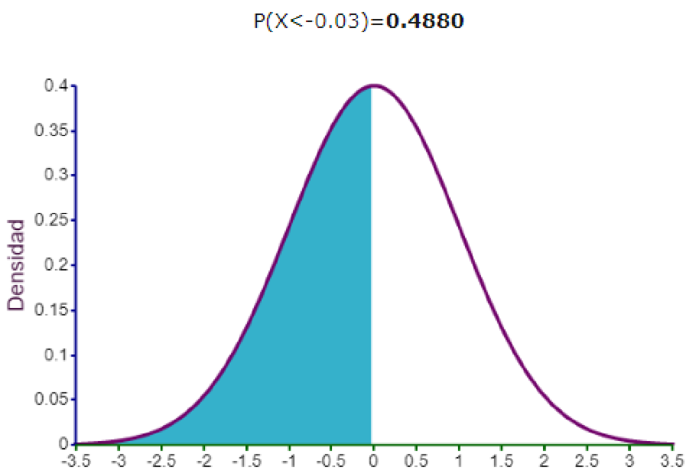


Figura 5. Representando en su gráfica

d. Calcular:

$$P(-2.06 \leq Z \leq 1.37)$$

Solución: aplicamos el caso 3: de la propiedad

$$P(-2.06 \leq Z \leq 1.37) = P[Z \leq 1.37] - P[Z \leq -2.06]$$

$$= 0.91466 - 0.01970 = 0.8950$$

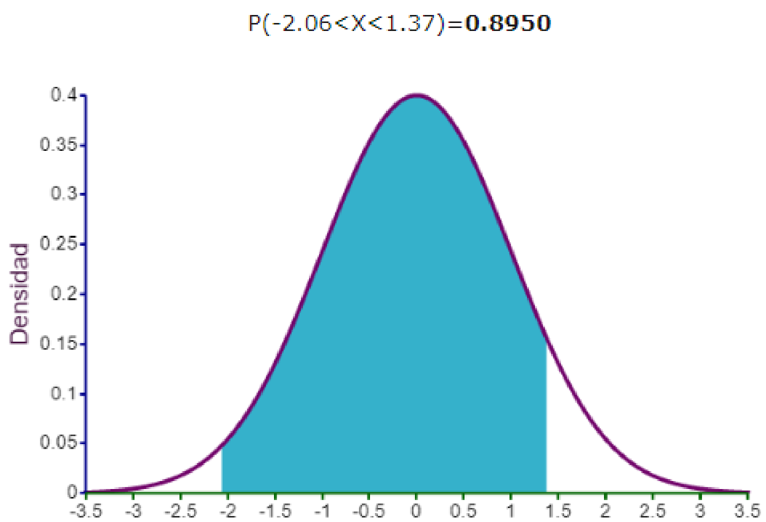


Figura 6. Representando en su gráfica

e. Calcular:

$$P[2.57 \leq Z \leq 3.51]$$

Solución: aplicamos la propiedad

$$P(2.57 \leq Z \leq 3.51) = P[Z \leq 3.51] - P[Z \leq 2.57]$$

$$= 0.99978 - 0.99492 = 0.0049$$

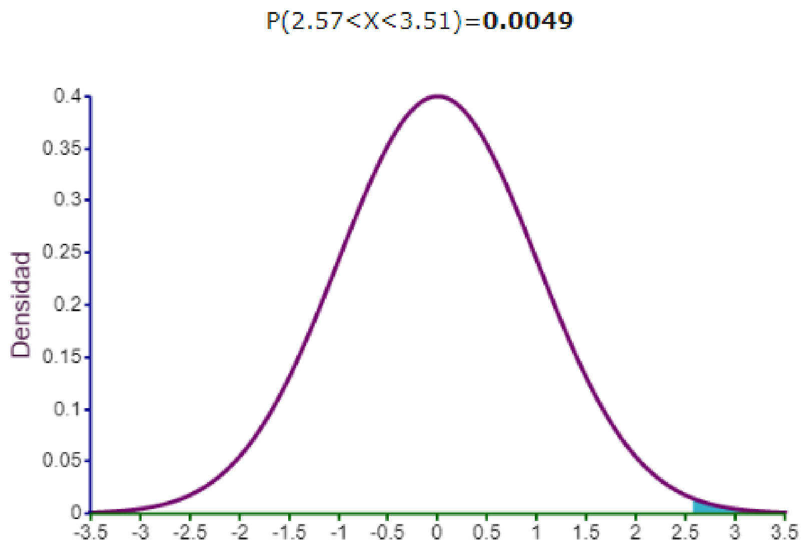


Figura 7. Representando en su gráfica

Ejemplo 18.

2. Los investigadores de la Universidad Nacional de Jaén dedican cierto tiempo a leer la publicación de la revista PAKAMUROS, y este tiempo sigue una distribución normal con una media de 48 minutos y una desviación estándar de 17 minutos
   a. ¿Cuál es la probabilidad que un investigador elegido al azar tarde por lo menos una hora en leer la publicación de la revista PAKAMUROS?
   b. ¿Cuál es el límite de tiempo que debe emplear un investigador de esta revista para estar dentro del 36% de suscriptores que emplean menos tiempo a esta tarea?

Solución

a. X= tiempo empleado por los suscriptores de la revista PAKAMUROS en leer la publicación.

$$X \rightarrow \mathrm{N}(\mu = 48, \sigma^2 = 17^2)$$

Nos piden calcular:

$$P(X \geq 60)$$

Estandarizamos la variable X, asimismo, utilizaremos la tabla de la distribución normal y calcularemos la probabilidad.

$P(X \geq 60) = 1 - P(X < 60)$

$$= 1 - P(\frac{x-48}{17} < Z < \frac{60-48}{17})$$

$$= 1 - P(Z < 0.71)$$

$$= 1 - 0.76115 = 0.24$$

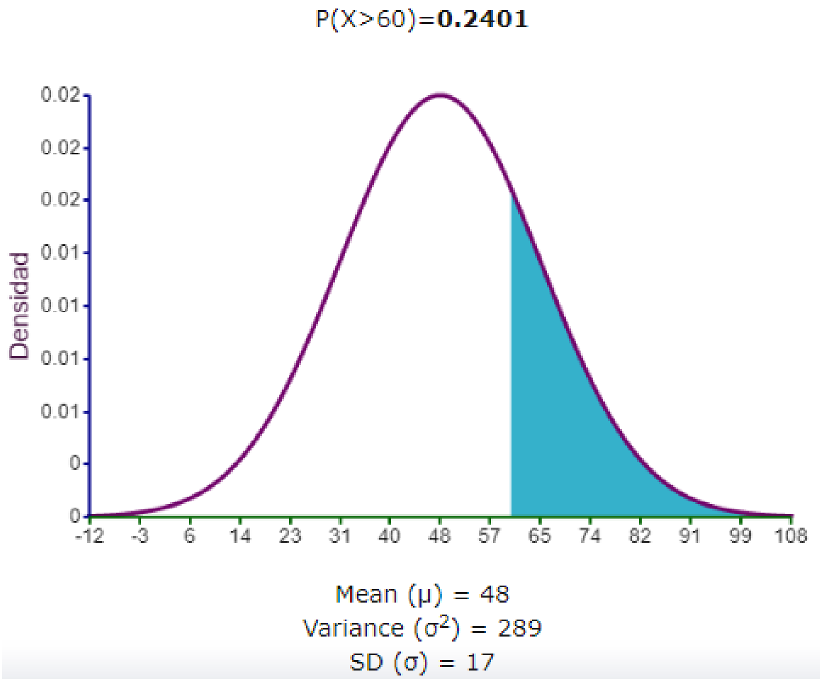


Figura 8. Representando en su gráfica

b. **Solución**

$P(X \leq X_{máx}) = 0.36$

Estandarizamos la variable X, para poder ursa la tabla de la distribución normal

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-48}{17} < \frac{X_{\max}-48}{17}\right) = P\left(Z < \frac{X_{\max}-48}{17}\right) = 0.36$$

Ubicamos el valor en la taba normal, el valor es -0.37

Dónde: Xmáx = 41.71 min.

Ejemplo 19.

El promedio de las alturas de 700 alumnos de la universidad nacional de Jaén es 1.60m y la desviación estándar 0.25 m y asumiendo una distribución normal, ¿cuántos alumnos se estima que tienen una altura entre 1.33 m y 1.72metros?

Solución:

Identificamos la variable X: altura en metros

$X \rightarrow n(1.60,\ 0.06)$

Nos piden:

$$P(1.33 \geq 1.72) = P\left[\frac{1.33 - 1.60}{0.25} \leq Z \leq \frac{1.72 - 1.60}{0.25}\right]$$

$$= P\left[\frac{1.72 - 1.60}{0.25} \leq Z \leq \frac{1.33 - 1.60}{0.25}\right]$$

$$= [0.48 \leq Z \leq -1.08]$$

$$= 0.68439 - 0.14007 = 0.54432$$

Calculamos el número de alumnos que miden entre $P(1.33 \geq 1.72)$ y lo calculamos con la muestra.

$n_1 = n \times P[1.33 \leq X \leq 1.72]$

$n_1 = 700 \times 0.54432 = 381\ alumnos$

Ejemplo 20.

Cuál es la probabilidad de que las ventas diarias en la oficina de Producción de la universidad nacional de Jaén excedan los 800 dólares en un día dado, determinar utilizando la distribución normal de probabilidad, con una media de 510 y una desviación estándar de 134.

Solución

Identificamos la variable: X = ventas diarias en dólares

$X \rightarrow n(5.10,\ 17956)$

$\mu = \$510 \quad ; \quad \sigma = \$134$

Nos piden:

$$P(X \geq 800) = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{800 - 510}{134}\right]$$

$$= P[Z \geq 2.16]$$

$$= 1 - P[X \leq 2.16]$$

$$= 1 - 0.98461 = 0.01539$$

6. Ejercicios de Aplicación

1. El ingreso mensual de los Investigadores Renacyt de la Universidad Nacional de Jaén tiene una distribución normal con $\mu = \$600$ y $\sigma = \$900$
   a. Se elige al azar un investigador Renacyt ¿cuál es la probabilidad que su ingreso mensual sea menor a $700?
   b. Si el 4% de los investigadores Renacyt con los ingresos más altos deben pagar impuestos ¿a partir de qué nivel de ingreso mensual se deben pagar impuestos?
2. Una estación vehicular encuentra que el tiempo de la estación sigue una distribución normal con $\mu = 18$ minutos y $\sigma = 4.3$ minutos. Se elige un vehículo al azar, calcular la probabilidad:
   a. ¿Que permanezca en la estación por más de 25 minutos?
   b. ¿El tiempo máximo para que un vehículo se encuentre dentro del 13,4 en la estación?
3. Calcular $P[Z \leq 1.37]$
4. Hallar P [-2.16 $\leq$ Z $\leq$ 1.62]
5. Suponga que X representa la longitud de una varilla que sigue una distribución normal con una media de 12 y una varianza de 4. Una varilla se considera aceptable si su longitud es mayor a 12.5 pulgadas. Calcule el porcentaje de varillas que cumplen con este criterio
6. Sigue una distribución normal, la duración de un motor con una $\mu = 44$ segundos y $\sigma = 14$ segundos. Calcular la probabilidad:
   a. La duración de un motor sea superior a 49 segundos.
   b. ¿Cuál es la duración mínima aproximada que debe tener un motor para estar dentro del 15% de motores con mayor duración?
7. Supóngase que los gastos durante el ciclo académico de los estudiantes de Ingeniera Civil con media s/.32 y desviación estándar de s/.8
   a. ¿Hallar la probabilidad que el gasto de un estudiante seleccionado al azar sea superior a 33 soles?
   b. Determinar la probabilidad de que el gasto de un estudiante seleccionado al azar sea menor que 35.53 pero mayor a 25.54 soles?

8. La cantidad de dinero destinada al ahorro mensual de los docentes sigue una distribución normal con $\mu = 400$ soles y una $\sigma = 80$ soles.
   a. Se selecciona un docente al azar ¿Cuál es la probabilidad que al mes ahorre al menos S/. 600?
   b. ¿Cuál es la probabilidad que ahorre entre 400 y 700 soles?
9. El pago promedio diario de los corresponsales de una constructora es de 15 dólares, con una desviación estándar de 0.53 dólares, y se asume que estos pagos siguen una distribución normal. ¿Qué porcentaje de los corresponsales reciben pagos diarios entre 12?5 y 14.5?
10. En un proceso de fabricación de varillas de aluminio, se establecen ciertas especificaciones para la longitud y diámetro de las varillas. Para cada una de éstas características, las varillas pueden clasificarse como demasiado corta, demasiado larga o estar bien y el diámetro se puede clasificar en delgado, mediano y grueso. En una población de mil varillas, se observa la siguiente distribución por clases:

Longitud	Diámetro		
	delgado	mediano	grueso
D. C	10	3	5
Está bien	38	900	4
D.L	2	25	13

Se selecciona una varilla al azar.
   a. ¿Cuál es la probabilidad que sea delgado, si se observa que es demasiado corta?
   b. Si sabemos que está demasiado larga ¿Cuál es la probabilidad que el diámetro de la varilla esté mediano?
11. Una fábrica de baterías recibe mercadería de tres proveedores I, J y K produciendo el 10%, 44% y 46% respectivamente. La información del área de control de calidad registra que la mercadería defectuosa son 1%, 0.25% y 4.5%
   a. ¿Hallar la probabilidad que la mercadería sea defectuosa?
   b. ¿Determinar la probabilidad que la mercadería no esté defectuoso?
   c. Si se elige al azar una mercadería sabiendo que es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad que provenga del proveedor I?

d. Si se elige una mercadería al azar sabiendo que no es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad que sea del proveedor K?

12. El Ingeniero Mario Félix imparte el curso de Diseño de máquinas para industrias desde hace varios años, en el presente ciclo, el 60% de los estudiantes aprobaron su primer examen. El 80% de los que aprobaron estudiaron y el 20% de los que reprobaron estudiaron. Si tomaste un curso con el Ingeniero Mario. ¿Debería estudiar para pasar las pruebas?
    a. Calcula la probabilidad de pasar la prueba tal que se ha estudiado
    b. Calculando la probabilidad pasar la prueba tal que no se ha estudiado
13. Una empresa a la fabricación de tornillos para motores eléctricos cuenta con tres máquinas eléctricas, A, B y C, y producen el 45%, 30% y 25%, de piezas. Por lo tanto, los porcentajes de producción defectuosa son 4%, 6% y 10% respectivamente.
    a. Seleccionamos un tornillo al azar; calcule la probabilidad de que el producto sea defectuoso.
    b. Identificamos un tornillo y resulta ser defectuosa; ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina eléctrica B.
    c. ¿De las máquinas A, B o C tiene mayor probabilidad de tener un tornillo defectuoso?
14. ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo se detenga si tiene dos motores, uno principal y otro auxiliar, y este se detiene solo si ambos motores fallan, considerando que la probabilidad de fallo del motor principal es del 0?05 y la del motor auxiliar es del 0.10, asumiendo que los motores funcionan de manera independiente?
15. Se clasifica un grupo de 500 Ingenieros según sus características de peso y el efecto del peso sobre la hipertensión. Se analiza lo siguinte:

	Sobre peso	Peso normal	Bajo peso
Hipertenso(H)	50	40	10
No Hipertenso(Hc)	75	225	100

    a. ¿Cuál es la probabilidad que una persona seleccionada al azar tenga hipertensión?
    b. Según la clasificación de los ingenieros ¿Determinar la probabilidad que

sea hipertenso sabiendo que tiene sobrepeso?

c. ¿Que tenga peso normal si no es hipertensa?

16. Un estudio a los estudiantes sobre la satisfacción del servicio en una cafetería en la universidad nacional de Jaén y se midió con una escala de 1-100, de las escuelas de Ingeniería Civil, Tecnología Médica, Ingeniería Mecánica y Eléctrica y Ingeniería Forestal y Ambiental. Los resultados se presentan a continuación:

Ocupación	Calificación de la satisfacción				
	Menos de 50	[50-59]	[60-69]	[70-79]	[80-89]
Ingeniería Civil	10	21	22	11	11
Tecnología Médica	16	23	24	13	10
Ingeniería Mecánica y Eléctrica	10	24	20	10	13
Ingeniería Forestal y Ambiental	12	20	25	14	12

Se elige al azar a uno de los estudiantes, cual es la probabilidad:

a. ¿Que haya dado una calificación de 70 ó más en la satisfacción del servicio de cafetería?

b. ¿Que su calificación está de 50 a 59 y que estudie Ingeniería civil?

c. ¿Su calificación haya sido inferior de 60 o estudie Ingeniería forestal y ambiental?

d. ¿Estudie Tecnología Médica y su calificación no haya sido por lo menos 60?

17. La información muestra algunas características, trescientas personas que se presentaron para una oferta laboral:

Género	Experiencia previa	Grado de instrucción		
		Secundaria (S)	Técnica (T)	Universitaria (U)

Masculino(M)	Sin	35	38	13
	Con	10	30	18
Femenino (F)	Sin	40	37	8
	Con	12	42	17

Asignamos al azar una persona, la probabilidad:

a. ¿Qué tenga instrucción secundaria?
b. ¿Tenga instrucción técnica y sin experiencia previa?
c. ¿Qué sea mujer?
d. ¿Qué tenga experiencia previa?
e. ¿La probabilidad que sea una mujer sin experiencia previa?

18. ¿Cuál es la probabilidad que el consumo mensual de energía eléctrica de un hogar en la ciudad sea inferior a 160 kW, considerando que sigue una distribución normal con una media de 150 kW y una desviación estándar de 25 kW?
19. ¿cuál es la probabilidad que Z sea mayor que 2.35?
20. El área de producciones de la Universidad Nacional de Jaén, se somete a un grupo de alumnos de cierta universidad a un experimento para medir el tiempo de reacción cuando se ingesta una bebida energizante que ha salido al mercado. Si este tiempo sigue con media de 20 segundos y desviación estándar 4 segundos. Calcular la probabilidad que un alumno de la universidad elegido al azar tenga un tiempo de reacción:
    a. Menos de 20 segundos
    b. Entre 15 y 26 segundos

7. Bibliografía

García-Rojas, J., Mendez, J. M., & Aguilar, M. (2023). *EL TEOREMA DE BAYES COMO UNA HERRAMIENTA EN LA MEJORA DE CALIDAD DEL SERVICIO EDUCATIVO. XIII*, 123-137.

Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2009). *Introduction to probability and statistics* (13. ed., international student ed). Brooks/Cole, Cengage Learning.

Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists* (5. ed). Elsevier, Acad. Press.

Sánchez, N. A. (2017). Análisis de problemas en estadística y probabilidad en libros de texto de segundo año de educación secundaria. *Revista científica*, *3*(30), 181. https://doi.org/10.14483/23448350.11948

Soto, G. (2011). El teorema de Bayes. *Revista de Educación Matemática*, *26*(3), Article 3. https://doi.org/10.33044/revem.10213

Triola, M. F. (Ed.). (2009). *Estadística* (10. ed). Pearson Educación.

Ávila Acosta, Roberto1997 “Estadística elemental”. Editorial Estudios y Ediciones. Lima.

Moya Calderón, Rufino1991.” Estadística Descriptiva Conceptos y aplicaciones”. Primera Edición. Edit, San Marcos lima, Perú.

García Ore, Celestino 2011,” Estadística Descriptiva y Probabilidades para ingenieros”. Edit. MACRO EIRL. Lima-Perú.

Córdova Zamora, Manuel 2009.” Estadística Descriptiva e inferencial” Tercera edic. Edit. Moshera R.L. Lima -Perú