UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

INGENERÍA CIVIL

MONOGRAFÍA

PRUEBAS DE HIPÓTESIS CHI-CUADRADO

Autores:

Dra. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaria

Dra. Marcela Yvone Saldaña Miranda

Ing. Mario Félix Olivera Aldana

Ciclo Académico: 2024_II

Jaén – Perú, noviembre 2024

Contenido

1. Introducción 2

2. Marco Teórico 3

    2.1. Definición 3

    2.2. Historia 3

    2.3. Características 4

3. Ejercicios 8

4. Referencias Bibliográficas 23

5. Anexos 24

1. Introducción

En el campo de la estadística inferencial, las distribuciones de probabilidad continua son una herramienta clave que sustenta tanto el análisis de datos como la toma de decisiones. Una de las distribuciones más comunes en pruebas estadísticas es la distribución Chi Cuadrado. Esta distribución, actúa de forma especial en contextos donde se requiere evaluar la variabilidad de los datos o la relación entre variables categóricas. Asimismo, se usa para comprobar hipótesis sobre si ciertos datos son como se esperaba.

En Ingeniería Civil, la distribución Chi-cuadrado juega un papel importante en el análisis de datos y en la evaluación de la calidad, siendo una herramienta clave para respaldar la toma de decisiones fundamentadas a través de pruebas de Hipótesis. De hecho, este tipo de distribución se emplea para analizar la independencia de factores que podrían influir en la resistencia de materiales de construcción o para examinar datos de encuestas sobre satisfacción de usuarios en infraestructuras. Además, es valioso para validar modelos estadísticos en la estimación de cargas, el análisis de fallos y el deterioro de pavimentos.

Los Autores

2. Marco Teórico

2.1. Definición

Es un caso particular de la distribución gamma, caracterizado por tener un único parámetro, n, conocido como "grados de libertad".

De acuerdo con Moya y Saravia (2016, p. En el contexto de esta explicación (607), se considera la función como un grupo de variables aleatorias independientes, identificadas como Z_1, Z_2, Z_n, que se distribuyen normalmente. Cada una de estas variables posee una media de 0 y una varianza de 1. En contraste, la variable aleatoria X 2 = Z_1^2 + Z_2^2 + ⋯ + Z_n^2 Puede interpretarse como una variable Chi-cuadrado con \(n \) grados de libertad, siempre que su función de densidad esté definida de la siguiente forma.

$$f_{x^2}(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\dfrac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & en\ otros\ casos \end{cases}$$

Donde Γ es la función gamma y "n" es un entero positivo.

Además $Z_1^2 \geq 0$; solo se tendrá probabilidades positivas $P[X \geq x]$

2.2. Historia

La aparición de la estadística moderna, con su uso en el análisis experimental, estuvo íntimamente vinculada con el progreso de la teoría de probabilidades. Personajes como Francis Galton y Karl Pearson destacaron en esta área. Específicamente, Pearson publicó en 1892 su libro "La gramática de la ciencia", un trabajo esencial en el campo de la filosofía científica. En este estudio, introdujo el test de Chi-cuadrado, un instrumento estadístico de gran importancia.

Pearson entendió que, al realizar experimentos con resultados aleatorios, los científicos suelen fundamentarse en modelos teóricos que deberían acercarse a los resultados previstos. No obstante, en la práctica, los hallazgos empíricos frecuentemente no concuerdan con las proyecciones del modelo, lo que suponía un enorme reto para los científicos de la ciencia. Así, desarrolló el método de Chi-cuadrado para medir la concordancia entre los datos y las distribuciones teóricas. Este método permite contrastar la homogeneidad entre varias muestras y determinar la independencia entre variables. Pearson formalizó este método en su famoso artículo sobre la distribución Chi-cuadrado, publicado en la primavera de 1900, marcando el inicio de un sino trascendental para el avance de la estadística. La prueba toma su nombre de la letra griega ji (χ), usada para representar su resultado.

2.3.Características

- ***Parámetros de la Distribución: Grados de Libertad***

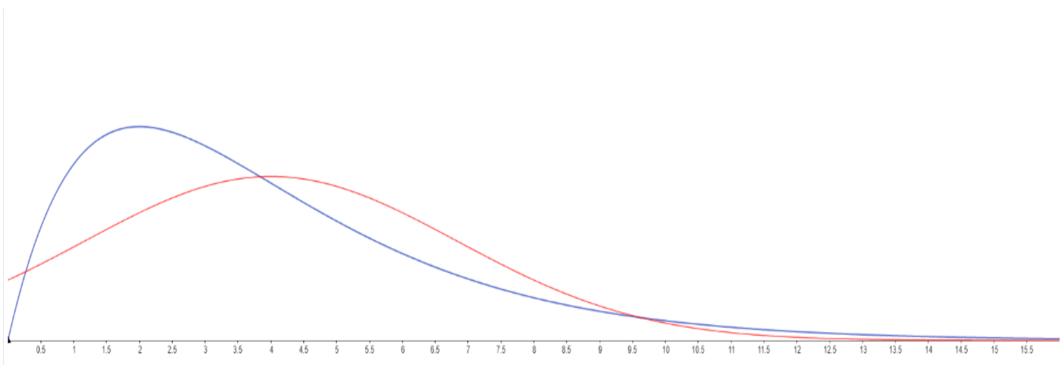
  La distribución Chi-cuadrado se define por un único parámetro, conocido como los grados de libertad, que determinan su forma y comportamiento (n). Este parámetro es crucial, ya que define la forma de la curva de la distribución. Los grados de libertad representan, en términos esenciales, la cantidad de variables independientes que participan en la suma de cuadrados que da lugar a la distribución Chi-cuadrado. Según Walpole, Myers, Myers y Ye (2012), "el valor de n determina la forma de distribución Chi-cuadrado".

- ***Distribución de Formas: Con cola derecha, asimétrica.***

  Se observa una asimetría positiva en la distribución Chi-cuadrado, marcada por una cola derecha más larga que la izquierda. Su forma varía en función de los grados de libertad con valores bajos de n, mostrando un sesgo pronunciado hacia la derecha, mientras que, con valores elevados, a medida que los grados de libertad se incrementan, la distribución Chi-cuadrada se torna más uniforme y se asemeja a una distribución normal. Esto demuestra cómo esto afecta su estructura y características estadísticas (Devore, 2012).

Figura 1

Forma de la Distribución: Asimétrica, con Cola Derecha



Nota: Elaboración gráfica propia utilizando el programa GeoGebra

- ***El promedio y la variabilidad de la distribución.***

Las siguientes son las medias y varianza de una variable aleatoria que sigue una distribución cuadrada de Chi con n grados de libertad:

$$\mu = E(X^2) = n$$

$$\sigma^2 = Var(X^2) = 2n$$

Esto significa que el promedio se alinea con la cantidad de grados de libertad, mientras que la varianza es el doble de ese valor. Para concluir, los dos momentos estadísticos se vinculan con la cantidad de grados de libertad.

Las distribuciones Chi-cuadradas constituyen una familia de distribuciones continuas con asimetría y una expansión hacia la derecha. Sin embargo, conforme se incrementan los grados de libertad n, la distribución del Chi cuadrado suele aproximarse a una distribución normal. Por lo tanto, en contextos reales donde n es considerable (es decir, n supera los 30), se puede determinar la probabilidad vinculada a la Chi cuadrado mediante estimaciones normales (Moya & Saravia, 2016, p. 608). Esto simplifica el estudio e interpretación de la información en entornos estadísticos.

Aplicaciones útiles

• Analiza la eficacia del ajuste

La finalidad del test de bondad de ajuste es comprobar si una variable aleatoria se rige por una distribución de probabilidad específica, comparando los datos recolectados con una distribución teórica o previamente establecida. Resulta beneficioso comprobar que la información de una muestra coincide con una distribución estimada, lo que facilita la evaluación de las suposiciones asociadas a estas.

Para su aplicación, resulta crucial clasificar los datos obtenidos, lo que simplificará la creación de un marco sólido para evaluar la validez de las hipótesis propuestas. Miguel Quintero y Miguel Durán, 2004).

Tabla 1

" Modelo de cómo repartir los datos de una prueba de ajuste de bondad. "

Categoría	1	2	3	…	k	
Frecuencia observada	Obs1	Obs2	Obs3		Obsk	n

Fuente: Elaboración propia

Se presupone que se conocen las probabilidades p_{io}, de que un suceso se incorpore a la categoría i.

Se sostiene que es necesario conocer las probabilidades p_{io} de ser clasificado en la categoría i.

Las siguientes son las hipótesis a examinar:

Ho: $p_1 = p_{10}$, $p_2 = p_{20} = \cdots p_k = p_{ko}$, lo que señala que la información se ajusta a la distribución prevista.

H1: al menos una de las probabilidades p_i se diferencia de la probabilidad proporcionada p_i0.

La estadística de prueba se manifiesta de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(Obs_i - np_{io})}{np_{io}}$$

donde p_{io} simboliza la proporción prevista en la categoría i, Obs_i La frecuencia detectada en una categoría señala la cantidad de veces que ocurre un suceso o valor particular en una muestra o experimento. El valor auténtico registrado en la información se alinea con la categoría i y n simboliza el tamaño de la muestra. La distribución de la estadística experimental se realiza siguiendo una distribución Chi-Cuadrado con k-1 grados de libertad.

Libertad donde se halla, siendo "k" la cantidad de categorías. Si el valor del test estadístico excede a $X_{1-\alpha}^2$, se procede a descartar la hipótesis nula.

- ***Evaluación de autonomía de las variables categóricas***

El análisis de la independencia de variables categóricas tiene como objetivo determinar si existe una relación estadísticamente significativa entre dos variables categóricas. La hipótesis nula sostiene que las variables son autónomas, mientras que la hipótesis alternativa propone que tienen una relación. Esta valoración se fundamenta en una distribución de Chi cuadrado, y se elimina la hipótesis nula cuando el valor obtenido supera el crítico. Así, se analiza la potencial correlación entre las variables categóricas A y B, sugiriendo hipótesis establecidas para el análisis.

Las siguientes son las hipótesis propuestas:

Hipótesis nula (H_1): No se observa una relación estadísticamente relevante entre las variables A y B, lo que indica que son autónomas.

Hipótesis alternativa (H_1): Existe un vínculo estadísticamente relevante entre las variables A y B.

Se emplea el test de Chi cuadrado para valorar hipótesis, proporcionando un enfoque estructurado para examinar la conexión entre variables categóricas y tomar decisiones fundamentadas en datos (Montgomery D., Runger G. & Hubele N.,2021).

$$X^2 = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

O_{ij} representa la frecuencia detectada en la celda situada en la fila i, columna j, mientras que $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$ j representa la frecuencia prevista para la celda (i, j).

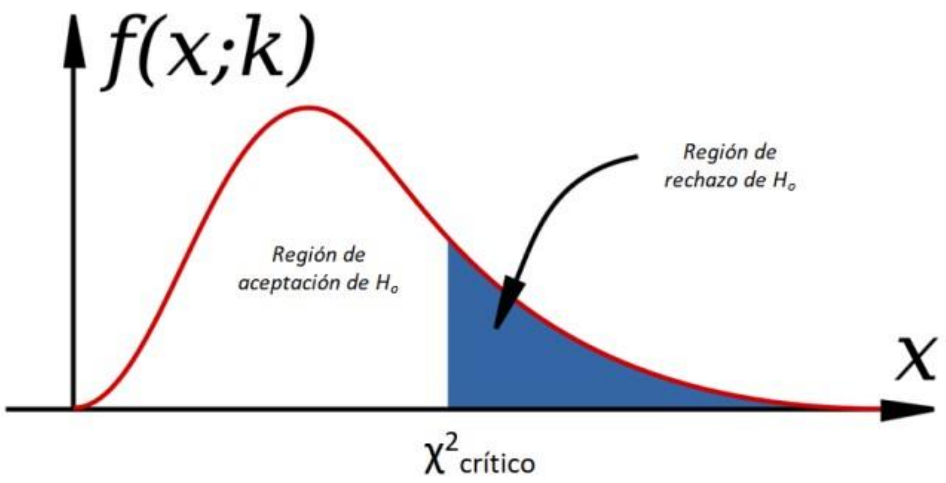
La prueba estadística se rige por una distribución de Chi-Cuadrado con grados de libertad de (r - 1) (c - 1).

- Nivel de significancia

El nivel de significancia, conocido también como nivel alfa, es el punto de corte que establece si un hallazgo es estadísticamente relevante. Si el valor de significancia es inferior a este umbral, se considera el resultado como significativo. (Cognos A., 2021).

Figura 2

Pruebas de hipótesis mediante chi cuadrado



Nota: *Adaptado de Lifeder. (s.f.). Chi cuadrada: Qué es, cómo se calcula y ejemplos*. (2016)

3. Ejercicios

EJERCICIO N° 01

Si se tiene tres tipos de materiales de construcción: Material A, Material B y Material C. Cada material ha sido sometido a tres tratamientos diferentes: Tratamiento 1, Tratamiento 2 y Tratamiento 3. El número de muestras que presentaron resistencia alta o baja se encuentra registrado en la siguiente tabla:

Paso 1: Recopilamos Datos

Tabla 2

"Distribución de resistencia de materiales de construcción según tratamiento y tipo de material"

Material / Tratamiento	**Tratamiento 1**	**Tratamiento 2**	**Tratamiento 3**	**TOTAL**
Material A	20	30	25	75
Material B	15	35	20	60
Material C	25	30	20	75
TOTAL	60	95	65	215

Fuente: *Elaboración propia*

Paso 2: Formulamos las Hipótesis

- Hipótesis Nula (H_0): El tipo de tratamiento no afecta la resistencia del material (las variables son independientes).

- Hipótesis Alternativa (H_1): El tipo de tratamiento sí afecta la resistencia del material (las variables están relacionadas).

Paso 3: Calculamos las frecuencias esperadas

Calculamos la frecuencia esperada usando la fórmula:

$$\mathrm{E\{ij\}} = \frac{total\ de\ la\ i * total\ de\ la\ columna\ j}{total\ general}$$

Donde:

- $E_{\{ij\}}$ es frecuencia esperada para la celda en la fila i y columna j.

Calculamos las frecuencias esperadas para cada combinación:

- Material A y Tratamiento 1: $\frac{(75*60)}{220} = 20.45$

- Material A y Tratamiento 2: $\frac{(75*95)}{220} = 32.39$

- Material A y Tratamiento 3: $\frac{(75*65)}{220} = 22.16$

- Material B y Tratamiento 1: $\frac{(70*60)}{220} = 19.09$

- Material B y Tratamiento 2: $\frac{(70*95)}{220} = 30.23$

- Material B y Tratamiento 3: $\frac{(70*95)}{220} = 20.68$

- Material C y Tratamiento 1: $\frac{(75*60)}{220} = 20.45$

- Material C y Tratamiento 2: $\frac{(75*95)}{220} = 32.39$

- Material C y Tratamiento 3: $\frac{(75*65)}{220} = 22.16$

Paso 4: Calculamos el chi-cuadrado

Usa la fórmula:

$$x^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

donde:

- O representa el valor observado.

- E representa el valor esperado.

Calculemos χ^2 para cada celda y sumamos los resultados:

- Material A y Tratamiento 1: $\frac{(20*32.39)^2}{32.39} = 0.01$

- Material A y Tratamiento 2: $\frac{(30*32.39)^2}{32.39} = 0.18$

- Material A y Tratamiento 3: $\frac{(30*22.16)^2}{22.16} = 0.36$

- Material B y Tratamiento 1: $\frac{(15*19.09)^2}{19.09} = 0.88$

- Material B y Tratamiento 2: $\frac{(35*30.23)^2}{30.23} = 0.76$

- Material B y Tratamiento 3: $\frac{(20*20.68)^2}{20.68} = 0.02$

- Material C y Tratamiento 1: $\frac{(25*20.45)^2}{20.45} = 1.02$

- Material C y Tratamiento 2: $\frac{(30*32.39)^2}{32.39} = 0.18$

- Material C y Tratamiento 3: $\frac{(20*22.16)^2}{22.16} = 0.21$

$$\sum x^2 = 3.62$$

Paso 5: Determinamos los Grados de Libertad y Comparamos con el Valor Crítico en la tabla estadístico Chi - cuadrado

- Grados de libertad (n): $(n - 1)(m - 1) = (3 - 1)(3 - 1) = 4.$

- Valor crítico de χ^2: Supongamos un nivel de significancia de 0.05. El valor crítico de χ^2 para 4 grados de libertad al 5% de significancia es 9.488.

	α									
v	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	12.832	13.388	15.086	16.75	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321

8	9.524	10.219	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588

Paso 6: Interpretación

Dado que el valor calculado $\chi^2 = 3.62$ es menor al valor crítico 9.488, no se rechaza la hipótesis nula.

Conclusión: No hay suficiente evidencia estadísticamente significativa para afirmar que el tipo de tratamiento afecta la resistencia del material. En otras palabras, los datos sugieren que la resistencia es independiente del tratamiento aplicado.

EJERCICIO N° 02

Paso 1: Recopilamos Datos

Tenemos datos sobre el número de fallas en varios tramos de pavimento, clasificados en diferentes categorías según la cantidad de fallas registradas en cada tramo. Las categorías pueden ser: Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto y Muy Alto.

La tabla de frecuencias observadas y las frecuencias esperadas es la siguiente:

Tabla 3

"Distribución del análisis de fallas en pavimentos

Categoría de Falla	**Observado (O)**	**Esperado (E)**
Muy Bajo	12	10
Bajo	15	20
Medio	30	25
Alto	20	25
Muy Alto	10	7

Fuente: Elaboración propia

Paso 2: Formulamos las Hipótesis

- Hipótesis Nula (H_0): Las fallas observadas en los pavimentos siguen la distribución teórica esperada.

- Hipótesis Alternativa (H_1): Las fallas observadas en los pavimentos no siguen la distribución teórica esperada.

Paso 3: Calculamos el chi-cuadrado

Usamos la fórmula:

$$x^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

donde:

- O representa los valores observados.

- E representa los valores esperados según el modelo teórico.

Calculemos χ^2 para cada categoría:

- Muy Bajo: $\frac{(12-10)^2}{10} = 0.4$

- Bajo: $\frac{(15-20)^2}{20} = 1.25$

- Medio: $\frac{(30-25)^2}{25} = 1$

- Alto: $\frac{(20-25)^2}{25} = 1$

- Muy Alto: $\frac{(10-7)^2}{7} = 1.29$

$$\sum x^2 = 4.94$$

Paso 4: Determinamos los Grados de Libertad y Comparamos con el Valor Crítico

- Grados de libertad (n): se calcula con la fórmula: $(k - 1) = 5 - 1 = 4$

- Valor crítico de χ^2: Imaginemos un nivel de significancia del 5%. Para 4 grados de libertad, el valor crítico de la prueba chi-cuadrado con un nivel de significancia del 5% es de 9. 488.

	α									
v	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	12.832	13.388	15.086	16.75	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588

Paso 5: Conclusión

Debido a que el valor calculado de χ^2, que es de 4. 94, resultó ser inferior al valor crítico de 9. 488, decidimos no rechazar la hipótesis nula.

Conclusión: La evidencia estadística disponible actualmente no respalda la afirmación de que las fallas observadas en el pavimento siguen la distribución teórica. Esto indica que el modelo teórico es apto para explicar las deficiencias notadas en el pavimento.

EJERCICIO N° 03

Encuesta de Satisfacción de Usuarios

Objetivo: Evaluar si existe una relación significativa entre la frecuencia de uso de una infraestructura y el nivel de satisfacción de los usuarios.

Paso 1: Recopilamos Datos

La tabla de contingencia es la siguiente:

Tabla 4

"Distribución de la satisfacción de usuarios"

Frecuencia / Satisfacción	Alta	Media	Baja	Total
Diaria	40	30	20	90
Semanal	25	35	15	75
Mensual	15	25	10	50
Total	80	90	45	215

Fuente: Elaboración propia

Paso 2: Formulamos las Hipótesis

Hipótesis Nula (H_0): La frecuencia de uso de la infraestructura y el nivel de satisfacción son independientes.

- Hipótesis Alternativa (H_1): La frecuencia de uso de la infraestructura y el nivel de satisfacción están relacionados.

Paso 3: Calculamos las Frecuencias Esperadas

Usamos la fórmula:

$$\text{E\{ij\}} = \frac{total\ de\ la\ i * total\ de\ la\ columna\ j}{total\ general}$$

Calculamos las frecuencias esperadas:

1. Frecuencia Diaria - Alta: $\frac{(90*80)}{215} = 33.72$

2. Frecuencia Diaria - Media: $\frac{(90*90)}{215} = 37.74$

3. Frecuencia Diaria - Baja: $\frac{(90*45)}{215} = 18.72$

4. Frecuencia Semanal - Alta: $\frac{(75*80)}{215} = 28.02$

5. Frecuencia Semanal - Media: $\frac{(75*80)}{215} = 31.63$

6. Frecuencia Semanal - Baja: $\frac{(75*45)}{215} = 15.70$

7. Frecuencia Mensual - Alta: $\frac{(50*80)}{215} = 18.60$

8. Frecuencia Mensual - Media: $\frac{(50*90)}{215} = 20.93$

9. Frecuencia Mensual - Baja: $\frac{(50*45)}{215} = 10.47$

<u>Paso 4: Calculamos el chi-cuadrado</u>

Usamos la fórmula:

$$x^2 = \frac{(O - E)^2}{E}$$

Calculamos $\chi 2$ para cada celda:

1. **Diaria - Alta**: $\frac{(40*33.72)^2}{33.72} = 1.10$

2. **Diaria - Media**: $\frac{(30*37.77)^2}{37.74} = 1.51$

3. **Diaria - Baja**: $\frac{(20*18.72)^2}{18.72} = 0.07$

4. **Semanal - Alta**: $\frac{(25*28.02)^2}{28.02} = 0.32$

5. **Semanal - Media**: $\frac{(35*31.63)^2}{31.63} = 0.34$

6. **Semanal - Baja**: $\frac{(15*15.70)^2}{15.70} = 0.03$

7. **Mensual - Alta**: $\frac{(15*18.60)^2}{18.60} = 0.69$

8. **Mensual - Media**: $\frac{(25*20.93)^2}{20.93} = 0.91$

9. **Mensual - Baja**: $\frac{(10*10.47)^2}{10.47} = 0.02$

Sumamos los valores:

$$\boldsymbol{\chi 2 = 1.10 + 1.51 + 0.07 + 0.32 + 0.34 + 0.03 + 0.69 + 0.91 + 0.02 = 4.89}$$

Paso 5: Establecemos los Niveles de Libertad y los cotejamos con el Valor Crítico.

- Grados de independencia (n): (3-1) (3-1) =4
- El valor crítico de χ2 al 5% de significancia con 4 grados de libertad es 9.488.

	α									
v	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	12.832	13.388	15.086	16.75	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588

Paso 6: Interpretación

Como el valor de χ = 4.89 es menor al valor crítico de 9.488, no se puede rechazar la hipótesis nula. Esto sugiere que no existe suficiente evidencia para concluir que exista una relación entre la frecuencia de uso de la infraestructura y el nivel de satisfacción.

EJERCICIO N° 04

Paso 1: Recopilamos Datos

La tabla de observados y esperados es la siguiente:

Tabla 5

"Distribución de la estimación de cargas en estructuras"

Intervalo de Carga (kN)	Observado (O)	Esperado (E)
0-10	18	20
10-20	22	25
20-30	25	30
30-40	20	15
40-50	15	10

Fuente: *Elaboración propia*

Paso 2: Formulamos las Hipótesis

La hipótesis nula (H_0) establece que las cargas observadas siguen la distribución teórica de cargas esperadas. La hipótesis alternativa (H_A) es que las cargas observadas no siguen la distribución teórica.

H_0: Las cargas observadas siguen el modelo teórico de distribución.

H_A: Las cargas observadas no siguen el modelo teórico de distribución.

Paso 3: Calculamos las Frecuencias Esperadas

Ya tenemos las frecuencias esperadas (E) para cada intervalo de carga, proporcionadas directamente en la tabla:

$$E_{0-10} = 20$$

$$E_{10-20} = 25$$

$$E_{20-30} = 30$$

$$E_{30-40} = 15$$

$$E_{40-50} = 10$$

Paso 4: Calculamos el chi-cuadrado

Para calcular el valor de $\chi 2$, usamos la fórmula general:

$$x^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

Donde:

- O son las frecuencias observadas en cada intervalo.
- E son las frecuencias esperadas en cada intervalo.

Ahora calculamos $\chi 2$ para cada intervalo:

1. Intervalo 0-10: $\frac{(18*20)^2}{20} = 0.20$

2. Intervalo 10-20: $\frac{(22*30)^2}{30} = 0.365$

3. Intervalo 20-30: $\frac{(25*30)^2}{30} = 0.83$

4. Intervalo 30-40:$\frac{(20*15)^2}{15} = 1.67$

5. Intervalo 40-50:$\frac{(15*10)^2}{10} = 2.5$

Paso 5: Sumar los Valores de Chi-Cuadrado

$$\chi 2 = 0.20 + 0.36 + 0.83 + 1.67 + 2.50 = 5.56$$

Paso 6: Determinamos Grados de Libertad y el Valor Crítico

- Los grados de libertad (n) se calculan con la fórmula: : $(k-1)$
- En este caso, tenemos 5 intervalos de carga, por lo que los grados de libertad son:

$$gl = 5 - 1 = 4$$

El valor crítico de $\chi 2$ para un nivel de significancia del 5% (α=0.05) y 4 grados de libertad es 9.488. Este valor se obtiene de la tabla de distribución de $\chi 2$.

	α									
v	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	12.832	13.388	15.086	16.75	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588

Paso 7: Comparación del Valor $\chi 2$ con el Valor Crítico

$\chi 2 = 5.56$,

Valor crítico = 9.488

Como $\chi 2 = 5.56$ es menor que 9.488, no rechazamos la hipótesis nula.

Paso 8: Interpretación

Dado que el valor calculado de $\chi 2$ (5.56) es menor que el valor crítico (9.488), no contamos con suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto indica que las cargas observadas se ajustan al modelo teórico de distribución planteado.

EJERCICIO 5:

Análisis de la Degradación de Materiales

Objetivo: Examinar si la degradación de un material depende de condiciones ambientales como humedad y temperatura.

Paso 1: Recopilamos Datos

La tabla de contingencia es la siguiente:

Tabla 6

"Distribución del análisis de la degradación de materiales"

Humedad / Temperatura	Baja	Media	Alta	Total
Baja	30	25	20	75
Media	20	30	25	75
Alta	15	20	30	65
Total	65	75	75	215

Fuente: *Elaboración propia*

<u>Paso 2: Calculamos las Frecuencias Esperadas</u>

Usamos la fórmula:

$$x^2 = \frac{total\ de\ la\ i * total\ de\ la\ columna\ j}{total\ general}$$

Calculamos las frecuencias esperadas para cada celda:

1. **Baja - Baja**: $\frac{(75*65)}{215} = 22.73$

2. **Baja - Media**: $\frac{(75*75)}{215} = 26.39$

3. **Baja - Alta**: $\frac{(75*75)}{215} = 26.39$

4. **Media - Baja**: $\frac{(75*65)}{215} = 22.73$

5. **Media - Media**: $\frac{(75*75)}{215} = 26.39$

6. **Media - Alta**: $\frac{(75*75)}{215} = 26.39$

7. **Alta - Baja**: $\frac{(65*65)}{215} = 19.30$

8. **Alta - Media**: $\frac{(65*75)}{215} = 22.73$

9. **Alta - Alta**: $\frac{(65*75)}{215} = 22.73$

<u>Paso 3: Calculamos el chi-cuadrado</u>

Usamos la fórmula:

$$x^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

Calculamos $\chi 2$ para cada celda:

1. **Baja - Baja**: $\frac{(30*22.73)^2}{22.73} = 2.30$
2. **Baja - Media**: $\frac{(25*26.39)^2}{26.39} = 0.07$
3. **Baja - Alta**: $\frac{(20*26.39)^2}{26.39} = 1.53$
4. **Media - Baja**: $\frac{(20*22.73)^2}{22.73} = 0.33$
5. **Media - Media**: $\frac{(30*26.39)^2}{26.39} = 0.48$
6. **Media - Alta**: $\frac{(25*26.39)^2}{26.39} = 0.07$
7. **Alta - Baja**: $\frac{(15*19.30)^2}{19.30} = 0.99$
8. **Alta - Media**: $\frac{(20*22.73)^2}{22.73} = 0.33$
9. **Alta - Alta**: $\frac{(30*22.73)^2}{22.73} = 2.30$

Sumamos los valores:

$$\boldsymbol{\chi 2 = 2.30 + 0.07 + 1.53 + 0.33 + 0.48 + 0.07 + 0.99 + 0.34 + 2.30 = 8.31}$$

<u>**Paso 4: Determinamos los grados de libertad y compramos con el valor critico**</u>

Grados de libertad (n): $\boldsymbol{(3 - 1)(3 - 1) = 4}$

Valor crítico de $\chi 2$ con 4 grados de libertad al 5% de significancia es 9.488.

	α									
v	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.07	12.832	13.388	15.086	16.75	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588

Paso 5: Interpretación

Dado que $\chi 2 = 8.31$ es menor que el valor crítico 9.488, **no rechazamos la hipótesis nula**. Esto significa que no hay evidencia suficiente para afirmar que la degradación del material depende de las condiciones ambientales (humedad y temperatura).

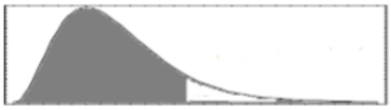
4. Referencias Bibliográficas

1. Devore, J. L. (2009). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Cengage Lear Ning Editores.
2. AVILA ACOSTA, ROBERTO. Estadística Elemental Lima: Estudios y Ediciones R. A.
3. CÓRDOVA ZAMORA, MANUEL. Estadística Inferencial Lima: Editorial MOSHERA S.R.L.
4. Fernández, H., Guijarro, M., Rojo, J. L., & Sanz, J. A. (1995). Ejercicios de cálculos de probabilidades. Ariel, S.A. https://www5.uva.es/tono/estadisticaII/EJERCICIOS%20DE%20CALCULO%20DE%20PROBABILIDAD.pdf
5. "Probability and Statistics for Engineering and the Sciences" de Jay L. Devore.
6. "Applied Probability and Statistics for Engineers" de Charles S. Tapiero.

5. Anexos

Tabla Estadístico X^2

DISTRIBUCION CHI-CUADRADA



	Valores de la Probabilidad: p																		
G. de L.	**0.001**	**0.005**	**0.01**	**0.025**	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.446	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.005	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.649	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.343	3.000	3.655	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.070	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.822	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.803	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	4.594	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	11.030	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.380	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.179	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	6.989	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	14.631	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	7.807	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	15.812	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	8.634	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	9.467	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	10.307	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.152	12.624	13.983	15.338	16.780	18.418	20.465	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.002	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	12.857	14.440	15.893	17.338	18.868	20.601	22.760	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	13.716	15.352	16.850	18.338	19.910	21.689	23.900	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	14.578	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	15.445	17.182	18.768	20.337	21.991	23.858	26.171	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	16.314	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	17.187	19.021	20.690	22.337	24.069	26.018	28.429	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	18.062	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	18.940	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	19.820	21.792	23.579	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	20.703	22.719	24.544	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	21.588	23.647	25.509	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	22.475	24.577	26.475	28.336	30.283	32.461	35.139	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	23.364	25.508	27.442	29.336	31.316	33.530	36.250	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703