UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

INGENERÍA CIVIL

MANUAL

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Autores:

Dra. Rosario Yaqueliny Llauce Santamaria

Dra. Marcela Yvone Saldaña Miranda

Mg. Mario Félix Olivera Aldana

Jaén – Perú, febrero 2025

Índice

1. Introducción

La probabilidad de éxitos y fallas se mide por la probabilidad discreta, que es la distribución binomial.

Existen numerosos casos en los que es probable que ocurra un evento particular en las e mpresas Esto puede ser exitoso o no exitoso sin superar a un punto medio. El resultado de la fabricación de un artículo puede ser positivo o negativo. El interés no es el factor principal que lo lleva En tales casos, se utiliza la distribución binomial.

El número de éxitos en una secuencia de prueba independiente se modela como una dist ribución de probabilidad discreta, conocida como distribución binomial, con cada proba bilidad de éxito como una constante

La aplicación de la distribución binomial en la Ingeniería civil se puede ver en una variedad de campos, incluida la evaluación de la confiabilidad de la estructura, la determinación de la probabilidad de falla del componente y la optimizació n de los sistemas de mantenimiento.

Por el contrario, la distribución binomial extiende la noción de la distribución de Bernoulli a múltiples experimentos independientes que producen dos resultados distintos ¿Cuántos éxitos hay en una serie de ensayos idénticos e independientes, dando un buen modelo para situaciones donde los experimentos se repiten en condiciones idénticas?
El enfoque del manual estará en las características matemáticas, aplicaciones y fórmulas que definen estas distribuciones, enfatizando su importancia y utilidad en las estadísticas y probabilidades

2. Objetivos

- Entender la teoría, propiedades y aplicaciones de la Distribución binomial en la carrera de Ingeniería
- Aplicar la distribución binomial para medir la fiabilidad de estructuras y sistemas.
- Emplear la Distribución binomial para estimar la probabilidad de falla de componentes y sistemas.

3. Distribución Binomial

La distribución binomial representa la probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos de un experimento binomial. Si una variable aleatoria X sigue esta distribución, la probabilidad de que tome el valor k se determina utilizando la siguiente expresión matemática

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad ; \quad 0 \leq x \leq n$$

Donde:

- n: número de intentos
- k: número de éxitos
- p: probabilidad de éxito en un ensayo dado
- c_k^n: el número de formas de obtener k éxitos en n intentos

Además:

Media $E(X) = np$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{npq}$

Para ilustrar, consideremos el escenario de lanzar una moneda al aire 10 veces. En este caso, podemos utilizar la distribución binomial para determinar la probabilidad de obtener exactamente 7 caras.

3.1.Propiedades de la Distribución Binomial.

Debe Cumplir con las siguientes propiedades:

- Dos posibles resultados: Imagina que estás lanzando una moneda. La variable aleatoria en este caso podría ser "obtener cara" o "obtener cruz". Estos son los dos resultados posibles en cada lanzamiento.
- Probabilidad constante: Supongamos que la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento justo de la moneda es (p = 0.5). Esa probabilidad se mantiene constante en todos los lanzamientos. Siempre tienes la misma posibilidad de éxito.
- Independencia de ensayos: Cada lanzamiento de la moneda es independiente. Si obtuviste cara en el primer lanzamiento, eso no afecta la probabilidad en el segundo lanzamiento. Cada intento es como empezar de cero.
- Parámetro de probabilidad: La distribución de Bernoulli se define por un solo número: la probabilidad de éxito (p). Si conoces esa probabilidad, puedes modelar muchos experimentos binarios diferentes

3.2.Características

Se dice que X sigue una distribución Binomial de parámetros n y p, que se representa con la siguiente notación:

Si X ~ B (n, p)

$n = número\ de\ ensayos$

$p = probabilidad\ de\ éxito$

3.3.Su función de probabilidad viene definida por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\ , \quad x = 0,1,2, \ldots\ldots, n$$

Donde, n, debe ser un entero positivo y p debe pertenecer al intervalo $0 \leq p \leq 1$, por ser una proporción.

3.4.Coeficiente binomial:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Su media, varianza y desviación estándar, vendrán dadas por las siguientes expresiones:

Media o valor esperado

$$\mu = E(X) = np$$

3.5.Varianza

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

3.6.Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{V(X)}$$

4. Ejemplos

Ejemplo 1

En una planta de energía, se utilizan interruptores automáticos para proteger el equipo contra sobrecargas. La probabilidad de que un interruptor funcione correctamente cuando se activa es del 95%. Un ingeniero selecciona 20 interruptores automáticos al azar para realizar una inspección de calidad

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 18 interruptores funcionen correctamente?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que 19 a más interruptores funcionen correctamente?

Desarrollo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 18 interruptores funcionen correctamente?

Utilizamos la fórmula y representamos en los datos.

$$(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x}$$

$$f(18) = P(X = 18) = \binom{20}{18}(0.95)^{18}(1 - 0.95)^{20-18}$$

Primeramente, calculamos el coeficiente binomial:

$$\binom{20}{18} = \frac{20!}{18!\,(20 - 18)!} = 190$$

Ahora, remplazamos y seguimos calculando en la fórmula de distribución binomial.

$$f(18) = P(X = 18) = 190 * (0.95)^{18}(1 - 0.95)^{20-18}$$

$$= 0.1885$$

Interpretación: La probabilidad de que exactamente 18 interruptores funcionen correctamente es aproximadamente 18.85%

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 19 a más interruptores funcionen correctamente?

Para encontrar P (X ≥ 19), calculamos P(X=19) y P(X=20) y los sumamos:

Utilizamos la fórmula de distribución binomial:

Calculamos para P(X=19):

$$f(19) = P(X = 19) = \binom{20}{19}(0.95)^{19}(1 - 0.95)^{20-19}$$

$$f(19) = P(X = 19) = \frac{20!}{(20 - 19)! * 19!} * (0.95)^{19}(1 - 0.95)^{1}$$

$$f(19) = P(X = 19) = 0.3774$$

Calculamos para P(X=20):

Remplazamos los datos

$$f(20) = P(X = 20) = \binom{20}{20}(0.95)^{20}(1 - 0.95)^{20-20}$$

Ahora, remplazamos y seguimos calculando en la fórmula de distribución binomial

$$f(20) = P(X = 20) = \frac{20!}{(20 - 20)! * 20!} * (0.95)^{20}(1 - 0.95)^{0}$$

$$f(20) = P(X = 20) = 0.3584$$

Finalmente, encontramos el valor de P (X ≥ 19), sumando P(X=19) y P(X=20)

$P\ (X \geq 19) = P\ (X = 19) + P\ (X = 20)$

Remplazamos los valores encontrados en la ecuación

$P\ (X \geq 19) = 0.3774 + 0.3584 = 0.7358$

En porcentaje es:

Interpretación: La probabilidad de que 19 a más interruptores funcionen correctamente es 73.58%

Ejemplo 2

En una fábrica de engranajes, el 90% de los engranajes producidos son de alta calidad y el 10% son defectuosos. Se seleccionan al azar 15 engranajes para inspeccionarlos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 12 engranajes sean de alta calidad?
b) ¿encuentra el valor esperado, varianza y desviación estándar?

Desarrollo:

Cada engranaje tiene una probabilidad de p=0.90 de ser de alta calidad y una probabilidad de q=1−p = 0.10 de ser defectuoso

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 12 engranajes sean de alta calidad?

   Queremos encontrar P (X = 12)

$$f(12) = P(X = 12) = \binom{15}{12}(0.90)^{12}(1 - 0.90)^3$$

$$f(12) = P(X = 12) = \frac{15!}{(15 - 12)!} * (0.90)^{12}(1 - 0.90)^3$$

$$f(12) = 0.1285$$

Interpretación: La probabilidad de que exactamente 12 de los 15 engranajes seleccionados sean de alta calidad es aproximadamente 12.85%.

b) ¿Encuentra el valor esperado, varianza y desviación estándar?

   Para n = 15 y p = 0.90, calculamos estos valores:

   Asimismo, encontramos media o valor esperado

   Utilizamos la formula y remplazamos los datos

$$\mu = E(X) = np$$

$$\mu = E(X) = 15(0.90) = 13.5$$

Interpretación: En promedio, de cada 15 engranajes seleccionados, se espera que 13.5 sean de alta calidad.

Encontramos la varianza:

Utilizamos la fórmula y remplazamos los datos:

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

$$\sigma^2 = V(X) = 15(0.90)(0.10) = 1.35$$

Encontramos la desviación estándar:

Utilizamos la formula y remplazamos los datos

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma = \sqrt{1.35} = 1.162$$

Ejemplo 3

En una fábrica de equipos topográficos el 5% de los equipos está defectuoso, determinar la probabilidad de que en una muestra de 12 se encuentre 2 equipos topográficos defectuosos.

Desarrollo:

X= n° de equipos topográficos defectuosos r=2

n=12

p=0.05   y q=1-0.05=0.95

$$P(X = 2) = \binom{12}{2}(0.05)^2(0.95)^{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{12!}{(12-2)! * 2!} * (0.05)^2(0.95)^{10}$$

$$P(X = 2) = 0.0988$$

∴0.0988∗100=9.88%

Interpretación: La probabilidad que existente en obtener 2 equipos topográficos defectuosos es de 9.88%

Ejemplo 4

Una empresa de construcción utiliza varillas de acero de un proveedor que, según registros históricos, produce un 5% de varillas defectuosas. La empresa realiza un control de calidad seleccionando 10 varillas al azar de cada lote.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 varillas en la muestra sean defectuosas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 3 varillas en la muestra sean defectuosas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 varilla sea defectuosa en la muestra?

Desarrollo:

Para resolver estas preguntas, aplicamos la fórmula de la Distribución Binomial:

Donde:

- n = 10 (tamaño de la muestra)
- p = 0.05 (probabilidad de que una varilla sea defectuosa)
- k es el número de varillas defectuosas

a) Probabilidad de que exactamente 2 varillas sean defectuosas.

$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^{10-2}$

$P(X = 2) = 0.0746$

Interpretación: La probabilidad de que exactamente 2 varillas sean defectuosas es 0.0746 o 7.46%.

b) Probabilidad de que menos de 3 varillas sean defectuosas

Esto implica la suma de las probabilidades para x = 0,1 y 2

$P\ (X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P\ (X < 3) = 0.9885$

Interpretación: La probabilidad de que menos de 3 varillas sean defectuosas es 0.9885 o 98.85%

c) Probabilidad de que al menos 1 varilla sea defectuosa

Utilizamos la propiedad del complemento:

$P\ (X \geq 1) = 1 - P\ (X = 0)$

$P\ (X \geq 1) = 0.9885$

Interpretación: La Probabilidad de que al menos 1 varilla sea defectuosa es 0.4013 o 40.13%

Ejemplo 5

Un Ingeniero Civil tiene la certeza de trabajar en una empresa es de 0.9 trabajando 3 h/d. Si tiene 3 empresas que lo solicitan trabajar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no trabaje en ninguna de las empresas?

Sea X la variable aleatoria que denota el número de empresas

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}(0.9)^0(0.1)^3$$

$$P(X = 0) = 0.001$$

Interpretación: la probabilidad que no trabaje en ninguna de las empresas es de 0.001

b) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en dos empresas?

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}(0.9)^2(0.1)^1$$

$$P(X = 2) = 0.243$$

Interpretación: la probabilidad que trabaje en dos empresas es de 0.243

c) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en menos de dos empresas?

Aplicamos la condición P (X< 2)

$$P(X=0) = \binom{3}{0}(0.9)^0(0.1)^3$$

$$P(X=0) = \mathbf{0.001}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}(0.9)^0(0.1)^3$$

$$P(X=1) = \mathbf{0.027}$$

Sumamos en la condición

P (X< 2) = P(X=0) + P(X=1)

P (X< 2) = 0.001 + 0.027 = 0.028

Interpretación: la probabilidad que trabaje en menos de dos empresas es de 0.028

d) Calcular la media y la varianza

Media o valor esperado

$$\mu = E(X) = np$$

$$\mu = E(X) = 3(0.9) = 0.27$$

Varianza

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

$$\sigma^2 = V(X) = 3(0.9)(0.1) = 0.27$$

Ejemplo 6

40 de 120 colegios de la ciudad de Jaén están con una infraestructura buena, se eligen 9 colegios al azar; Halle la probabilidad de que su infraestructura este en buen estado.

a) Exactamente 4 colegios
b) Más de 6 colegios
c) Calcule la media

Desarrollo

Sea X la variable que denota

n = 9

X: El número de colegios de la ciudad de Jaén que tienen una infraestructura buena

Éxito {infraestructura_ buena}: $p = \frac{40}{120} = 0.33$

Fracaso {infraestructura _mala}: q = 0.67

a) Exactamente 4 colegios de la ciudad de Jaén que tienen una infraestructura buena (x = 9)

   Reemplazamos en la fórmula

$$P(X = 4) = \binom{9}{4}(0.33)^4(0.67)^{9-4}$$

$$P(X = 4) = 0.20$$

   Interpretación: La probabilidad de que 4 colegios de un total de 9 tengan infraestructura buena es de 0.20

b) Más de 6 colegios (X> 6) tengan buena infraestructura:

   P(X> 6) = P(X=7) +P(X=8) +P(X=9)

$$= \binom{9}{7}(0.33)^7(0.67)^{9-7} + \binom{9}{8}(0.33)^8(0.67)^{9-8} + \binom{9}{9}(0.33)^9(0.67)^{9-9}$$

   Interpretación: La probabilidad de que más de 6 colegios de un total de 9 tengan infraestructura buena es de 0.008.

c) Calcule la media

$$\mu = E(X) = 9(0.33) = 2.97$$

Ejemplo 7

Antes de realizar un estudio de mecánica de suelos por un especialista en Geotecnia, según la Norma Técnica E.070 de Albañilería confinada en una zona de sismicidad moderada (Zona 2) el suelo debe tener una capacidad portante mínima de $1kg/\ cm^2$. Sin embargo, el Ingeniero encargado de obra tiene la certeza de asignar una probabilidad de 0.7 de la capacidad portante mínima, si realiza 8 ensayos breves en el área donde se va a edificar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga menos del límite establecido en todos sus ensayos?

   Sea x la variable aleatoria que denota el número de asignaturas.

$$P(X = 0) = \binom{8}{0}(0.7)^0(0.3)^8$$

$$P(X = 0) = 0.0001$$

   Interpretación: La probabilidad de que salga menos del límite establecido en todos sus ensayos es de 0.0001

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe tres de sus ensayos?

$$P(X = 3) = \binom{8}{3}(0.7)^3(0.3)^8$$

$$P(X = 3) = 0.0013$$

Interpretación: La probabilidad de que apruebe tres de sus ensayos es de 0.0013

c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe menos de tres de sus ensayos?

$$P(X \leq 2) = \binom{8}{0}(0.7)^0(0.3)^8 + \binom{8}{1}(0.7)^1(0.3)^7 + \binom{8}{2}(0.7)^2(0.3)^6$$

$$P(X \leq 2) = 0.0113$$

Interpretación: La probabilidad de que apruebe menos de tres de sus ensayos es de 0.0113

d) Calcular la media y la varianza.

Media

$$\mu = E(X) = np$$

$$\mu = E(X) = 8(0.7) = 5.6 \cong 6$$

Interpretación: La media es 6 ensayos.

Varianza

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

$$\sigma^2 = V(X) = 8(0.7)(0.3) = 1.68$$

Interpretación: La varianza es 1.68 ensayos.

Ejemplo 8

En un lote de 10 vigas de concreto, la probabilidad de que una viga tenga un defecto de resistencia es 0.1 ¿Cuál es la probabilidad de encontrar exactamente 2 vigas defectuosas en el lote?

Desarrollo

Usamos la distribución binomial, donde n = 10 y p = 0.1, para calcular la probabilidad de que haya exactamente X= 2 vigas defectuosas:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8$$

$$P(X = 2) = 0.1937$$

Interpretación: La probabilidad de encontrar exactamente 2 vigas defectuosas en el lote es aproximadamente 0.1937 o 19.37%.

Ejemplo 9

Un proyecto de construcción utiliza tubos de PVC para sistemas de alcantarillado. La probabilidad de que un tubo de PVC tenga defectos después de la instalación es de 0.05. Si se instalan 20 tubos en una sección del proyecto:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tubos presenten defectos?

$$P(X=2) = \binom{20}{2}(0.05)^2(0.95)^{18}$$

$$P(X=2) = 0.189$$

Interpretación: La probabilidad de que exactamente 2 tubos presenten defectos es de 0.189.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 3 tubos presenten defectos

$P\ (X > 3) = 1 - P\ (X \leq 3)$

$P\ (X \leq 3) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2) + P\ (X = 3)$

$$P(X \leq 2) = \binom{20}{0}(0.05)^0(0.95)^{20} + \binom{20}{1}(0.05)^1(0.95)^{19}$$
$$+ \binom{20}{2}(0.05)^2(0.95)^{18} + \binom{20}{3}(0.05)^3(0.95)^{17}$$

$P\ (X \leq 3) = 0.984$

Entonces $P\ (X > 3) = 1 - 0.984 = 0.\ 016$

Interpretación: La probabilidad de que más de 3 tubos presenten defectos es de 0.016.

Ejemplo 10

Un ingeniero civil está analizando muestras de suelo para determinar su capacidad portante. Se estima que el 70% de las muestras cumple con los requisitos de residencia. Si el Ingeniero analiza 5 muestras al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las muestras cumpla con los requisitos?

Los valores son:

n = 5

X = 0

P = 0.7

q = 0.3

Además, aplicamos la fórmula

$$P(X=0) = \binom{5}{0}(0.7)^2(0.3)^5$$

$$P(X=0) = \frac{5!}{(5-0)! * 5!} * (0.7)^2(0.3)^5$$

$$P(X = 0) = 0.00243$$

Interpretación: la probabilidad de que ninguna de las muestras cumpla con los requisitos es 0.00243

b) Calcular la media y la varianza del número de muestras que cumplen con los requisitos.

Aplicamos, la Fórmula de la media

$$\mu = E(X) = np$$

$$\mu = E(X) = 5(0.7) = 3.5$$

Asimismo, la Fórmula de la varianza

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

$$\sigma^2 = V(X) = 5(0.7)(0.3) = 1.05$$

Interpretación: la media y la varianza son 3.5 y 1.05 respectivamente

Ejemplo 11

Un ingeniero estructural ha diseñado una serie de vigas de concreto. Se estima que el 85% de estas vigas pueden soportar la carga máxima esperada. Si se seleccionan 4 vigas al azar:

¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 vigas puedan soportar la carga máxima?

$$P(X = X) = \binom{n}{x} P^X q^{n-x}$$

$$P(X \geq 3) = P[X = 3] + P[X = 4]$$

$$P(X \geq 3) = \binom{4}{3}(0.85)^3(0.15)^1 + \binom{4}{4}(0.85)^4(0.15)^0$$

$$P(X \geq 3) = \frac{4!}{(4-3)! * 3!} * (0.85)^3(0.15)^1 + \frac{4!}{(4-4)! * 4!} * (0.85)^4(0.15)^0$$

$$P(X \geq 3) = 0.368 \quad + \quad 0.522$$

$$P(X \geq 3) = 0.89 \quad \text{ó } 89\%$$

Interpretación: la probabilidad de que al menos 3vigas puedan soportar la carga máxima es 0.89 o 89%

5. Ejemplos propuestos aplicados a la Ingeniería

1. Rudolf Diesel tiene 15 camiones de entrega, que emplea sobre todo para entregar motores y chasis de motocicletas modificados en Alemania, y hace entrega a

diferentes destinos. De los 15 camiones, 6 presentan problemas con los frenos. En forma aleatoria se seleccionó una muestra de 5 camiones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de los camiones probados presenten problemas eléctricos y frenos defectuosos?
b) Entonces dos de los camiones probados presenten problemas eléctricos y frenos defectuosos.

2. En una planta de energía, se utilizan interruptores automáticos para proteger el equipo contra sobrecargas. La probabilidad de que un interruptor funcione correctamente cuando se activa es del 95%. Un ingeniero selecciona 20 interruptores automáticos al azar para realizar una inspección de calidad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 18 interruptores funcionen correctamente?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que 19 a más interruptores funcionen correctamente?

3. En una fábrica de engranajes, el 90% de los engranajes producidos son de alta calidad y el 10% son defectuosos. Se seleccionan al azar 15 engranajes para inspeccionarlos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 12 engranajes sean de alta calidad?
b) ¿encuentra el valor esperado, varianza y desviación estándar?

6. Conclusión

La distribución Binomial es un modelo probabilístico que se utiliza para escribir experimentos con dos posibles resultados, como el éxito y fracaso. Esta distribución asigna probabilidades a eventos discretos donde el éxito se presenta con el valor 1 y el fracaso con el valor 0. Por otro lado, la distribución binomial amplia este concepto al escribir la probabilidad de obtener un numero en específico de éxitos en múltiples repeticiones del experimento Bernoulli. La fórmula de la distribución binomial permite calcular la probabilidad de obtener K éxitos en n intentos, incorporando la probabilidad de éxito en un ensaño dado. Ambas distribuciones son fundamentales en la teoría de la probabilidad y encuentran aplicación en diversos campos para modelar y predecir resultados en situaciones con resultados binarios.

7. Bibliografía.

Devore, J. L. (2009). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. *Cengage Learning Editores*

Levin, R. I., & Rubin, D. S. (2004). *Estadística para administración y economía*. Pearson educación.

Martín Pliego, F.J. (2004). Introducción a la Estadística Económica y Empresarial. (Ed.) Thomson. Madrid.

Montiel, A.M.; Rius, F.; Barón F.J. (1997). Elementos básicos de Estadística Económica y Empresarial. (2ª Ed.) Prentice Hall, Madrid.

Peña, D. (2001). Fundamentos de Estadística. (Ed.) Alianza Editorial, S.A. Madrid. ISBN: 84206- 8696-4.

Field, A. (2013). Discovering statistics using IBM SPSS Statistics (4ª ed.). SAGE Publications.

Fisher, R. A. (1925). Statistical methods for research workers. Oliver & Boyd.

Howell, D. C. (2012). Statistical methods for psychology (8ª ed.). Wadsworth.

Montgomery, D. C. (2013). Design and analysis of experiments (8ª ed.). John Wiley & Sons.

Callister, W. D., & Rethwisch, D. G. (2018). *Materials science and engineering: An introduction (10th ed.).* Wiley.

Chen, X., & Chen, Y. (2020). *Energy efficiency and management in industrial applications. Springer.*

Groover, M. P. (2019). *Fundamentals of modern manufacturing: Materials, processes, and systems (7th ed.).* Wiley.

Jardine, A. K., L. D., & Banjevic, D. (2006). A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing, 20*(7), 1483-1510.