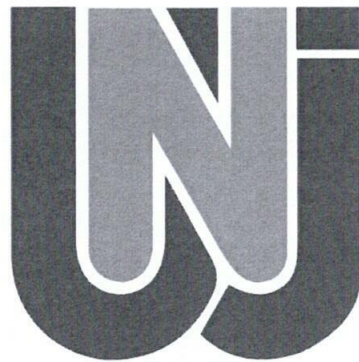


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN**

**COMISIÓN ORGANIZADORA**

**VICEPRESIDENCIA ACADÉMICA**



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE JAÉN**

**SEPARATA DE MÉTODOS  
NUMÉRICOS CON ENFOQUE  
INGENIERIL**

**TEORÍA DE ERRORES Y SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UNA ECUACIÓN  
ALGEBRAICA NO LINEAL DE UNA VARIABLE**

**Autores:**

**Mg. Enny Román Castillo**

**Mg. Frans Fuentes Maza**

**JAÉN, SETIEMBRE DEL 2024**

*Enny Román Castillo*

*FF*

NOMBRE DEL TRABAJO

**Separata Derivadas.pdf**

AUTOR

**Román Castillo - Fuentes Maza**

RECuento DE PALABRAS

**8368 Words**

RECuento DE CARACTERES

**37018 Characters**

RECuento DE PÁGINAS

**38 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**1.2MB**

FECHA DE ENTREGA

**Sep 7, 2024 8:16 PM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Sep 7, 2024 8:17 PM GMT-5**

● **9% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 9% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● **Excluir del Reporte de Similitud**

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 15 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente

*Román Castillo*  
*8/24*

NOMBRE DEL TRABAJO

**Separata Métodos Numericos.pdf**

AUTOR

**Román Castillo-Fuentes Maza**

RECUENTO DE PALABRAS

**5717 Words**

RECUENTO DE CARACTERES

**25882 Characters**

RECUENTO DE PÁGINAS

**35 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**1.1MB**

FECHA DE ENTREGA

**Sep 7, 2024 7:46 PM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Sep 7, 2024 7:47 PM GMT-5****● 8% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 8% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

**● Excluir del Reporte de Similitud**

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 15 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado

*Román Castillo-Fuentes Maza*



## I. PRESENTACION

Este trabajo académico denominado **separata de métodos numéricos con enfoque ingenieril** se ha desarrollado con el fin de facilitar la mejor comprensión sobre los métodos numéricos donde se abordaremos la teoría de errores en métodos numéricos y su aplicación a la solución de ecuaciones algebraicas no lineales de una variable desde un enfoque ingenieril. exploraremos cómo los errores, tanto truncamiento como redondeo, afectan la precisión de los métodos numéricos y cómo minimizarlos para obtener resultados fiables, seguido nos centraremos en técnicas para resolver ecuaciones algebraicas no lineales, como el método de bisección y el método de Newton-Raphson, explicando sus fundamentos teóricos, criterios de convergencia y aplicaciones prácticas. Es importante realizar una adecuada gestión de errores y selección de métodos para mejorar la exactitud y eficiencia en la resolución de problemas reales en ingeniería, proporcionando una visión integral de cómo los ingenieros pueden aplicar estos conocimientos para optimizar sus soluciones numéricas.

Invitamos a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Jaén a revisar este material académico, pues será muy útil en su formación profesional de pregrado.

Atte. Los autores

## II. INTRODUCCIÓN

En esta separata, nos centraremos en dos aspectos esenciales de los métodos numéricos con un enfoque ingenieril: la teoría de errores y la solución numérica de ecuaciones algebraicas no lineales de una variable. abordaremos la teoría de errores, que explora las fuentes y tipos de errores, como los errores de truncamiento y de redondeo, y cómo estos afectan la precisión y la confiabilidad de los resultados obtenidos mediante métodos numéricos. Esta sección es crucial para entender cómo gestionar y minimizar estos errores en aplicaciones prácticas, nos enfocaremos en la solución numérica de ecuaciones algebraicas no lineales, un problema común en la ingeniería que frecuentemente requiere métodos iterativos para encontrar soluciones aproximadas. Examinaremos técnicas como el método de bisección y el método de Newton-Raphson, detallando sus principios teóricos, ventajas, desventajas y aplicaciones típicas en el contexto ingenieril.



En resumen, esta separata proporcionará el fundamento necesario para aplicar estos métodos de manera efectiva en la resolución de problemas reales en ingeniería, destacando la importancia de una adecuada comprensión de los errores y de la selección del método adecuado.

*Sanja R*

*RD*



## ÍNDICE

I.	PRESENTACION .....	2
II.	INTRODUCCIÓN .....	2
III.	TEORIA DE ERRORES.....	5
3.1.	APROXIMACIÓN Y ERRORES DE REDONDEO.....	5
3.1.1.	CIFRAS CIENTÍFICAS.....	5
3.1.2.	EXACTITUD Y PRECISIÓN.....	5
3.1.3.	DEFINICIÓN DE ERROR.....	6
3.1.4.	MÁXIMA COTA DE ERROR DE UNA RAÍZ APROXIMADA.....	7
3.1.5.	REDONDEO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS.....	7
IV.	SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES DE UNA VARIABLE. 8	
4.1.	LÍMITES Y CONTINUIDAD.....	8
4.2.	MÉTODOS CERRADOS.....	15
4.2.1.	MÉTODO DE BÚSQUEDA O MÉTODO AL AZAR.....	15
4.2.2.	MÉTODO DE LOCALIZACIÓN .....	17
4.2.3.	MÉTODO DE BISECCIÓN.....	19
4.2.4.	MÉTODO DE REGULA FALSI. (Partes proporcionales o de posición falsa.).....	21
4.3.	MÉTODOS ABIERTOS .....	22
4.3.1.	MÉTODO DE ITERACIÓN DEL PUNTO FIJO. (o sustituciones sucesivas) .....	22
4.3.2.	MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON.....	26
4.3.3.	CRITERIO DE CONVERGENCIA .....	28
4.3.4.	MÉTODO DE LA SECANTE.....	29
4.3.5.	MÉTODO DE NEWTON DE SEGUNDO ORDEN.....	30
4.3.6.	RAÍCES DE POLINOMIOS .....	32
4.3.7.	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	34
V.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	35



### III. TEORIA DE ERRORES.

#### 3.1. APROXIMACIÓN Y ERRORES DE REDONDEO.

##### 3.1.1. CIFRAS CIENTÍFICAS.

**Instrumentos de medición:**

Velocímetro: Mide la rapidez promedio del vehículo, y solo se toma en cuenta hasta el tercer dígito; por lo tanto, no tiene sentido registrar 48,8642138 km/h.

Odómetro: Registra la distancia total o parcial recorrida, considerando solo hasta seis dígitos, como por ejemplo 87,324.5 km durante su uso.

Sea N un número real

0, 00001845

0, 0001845 → } *Tiene cuatro cifras significativas.*

0, 001845

El número real  $N=45300$  puede tener 3, 4 o 5 cifras significativas, dependiendo de cómo se exprese en notación científica.

$4.53 \times 10^4$  :

$4.530 \times 10^4$  :

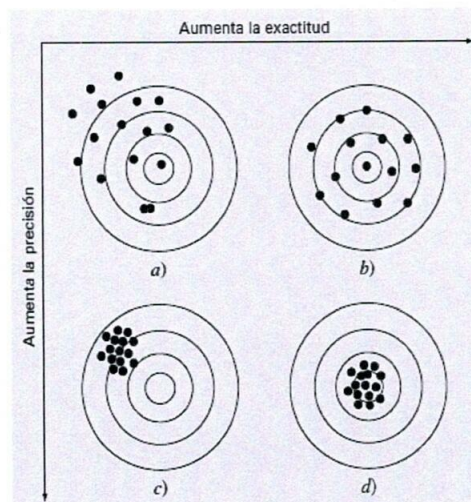
$4.5300 \times 10^4$  :

Observación: Los ceros (0) no siempre son cifras significativas.

##### 3.1.2. EXACTITUD Y PRECISIÓN.

Exactitud: indica qué tan próximo está el valor calculado al valor verdadero o correcto.

Precisión: describe cuán próximos están entre sí los valores calculados o medidos en repetidas ocasiones.





### 3.1.3. DEFINICIÓN DE ERROR.

Los errores en cálculos y mediciones pueden evaluarse en términos de exactitud y precisión. Los errores numéricos se originan al utilizar aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.

$$\text{Valor Verdadero} = \text{Valor aproximado} + \text{Error}$$

- $E_a = \text{Error Absoluto} = |\text{Valor Exacto} - \text{Valor Calculado}|$
- $E_r = \text{Error Relativo} = \left| \frac{\text{Error Absoluto}}{\text{Valor Exacto}} \right| = \left| \frac{\text{Error Verdadero}}{\text{Valor Verdadero}} \right|$
- $E_r = \text{Error Relativo} = 2 \frac{|\text{Error Absoluto}|}{|\text{Valor Exacto}| + |\text{Valor Calculado}|}$
- $E_a \times 100\% = \text{Error Absoluto porcentual}$
- $E_r \times 100\% = \text{Error Relativo Porcentual}$

Sea la ecuación de segundo grado.

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \text{Valor Exacto}$$

$$x = \pm 1,732 \rightarrow \text{Valor Aproximado}$$

**Ejemplo 01** (Punto Flotante). ¿Qué sucede si se reemplaza el número 0,12345678 por el número de punto flotante? 0,123456.?. ¿Calcular el error absoluto y relativo?

Solución.

- ✓ Calculando el error absoluto.

$$E_a = |0,123456 - 0,12345678|$$

$$= 0,00000078$$

$$= 7,8 \times 10^{-7}$$

$$= 78 \times 10^{-8}$$

- ✓ Calculando el error relativo.

$$E_r = \frac{E_a}{|\text{Valor exacto}|} = \frac{0,00000078}{0,123456}$$

$$= \frac{78}{123456}$$

$$= 631,80404354 \times 10^{-6}$$



- ✓ Calculando el error absoluto porcentual.

$$E_a \times 100\% = 78 \times 10^{-6}$$

- ✓ Calculando el error relativo porcentual.

$$E_r \times 100\% = 631,80404354 \times 10^{-4}$$

**Ejemplo 02:** Supongamos que se mide la longitud de un puente y de un remache, obteniendo 9999 cm y 9 cm, correspondientemente. Si los datos auténticos son 10000 cm y 10 cm, calcule: a) el error verdadero y b) el error relativo porcentual verdadero para cada medición.

**Solución**

- ✓ Calculando el error absoluto.

En el puente:  $E_a = |10000 - 9999| = 1$

En el remache:  $E_a = |10 - 9| = 1$

- ✓ Calculando el error relativo.

En el puente:

$$E_r = \frac{E_a}{|\text{Valor exacto}|} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

$$E_r \% = 0.01\%$$

En el remache:

$$E_r = \frac{E_a}{|\text{Valor exacto}|} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$E_r \% = 10\%$$

*Handwritten signature*

**3.1.4. MÁXIMA COTA DE ERROR DE UNA RAÍZ APROXIMADA.**

Se dice que “r” es la raíz de la ecuación  $f(x)=0$ , aproximadamente con n- cifras decimales exactas (CDE) si se cumple que.

$$C_r = |r^x - r| \leq 0.5 \times 10^{-n} = \frac{1}{2 \times 10^n}$$

**3.1.5. REDONDEO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS.**

Sea  $N=1,0575051615$

N (REDONDEO)	RESULTA
1CDE	1,1



2 CDE	1,06
3CDE	1,058
4CDE	1,0575
5CDE	1,05751
6CDE	1,057505
7CDE	1,0575052
8CDE	1,05750516

**Ejemplo 03:** Con cinco cifras significativas (redondear)

$$0,4678323=0,46783$$

$$1,3256217= 1,32562$$

$$3,163231501 = 3,16323$$

$$4,23216500= 4,23217$$

$$5,23211500 = 5,23212$$

**Ejemplo 04 :** Según el polinomio  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 0.35$  en  $x=1.37$ . Utilice aritmética con precisión de 3 dígitos y corte. Calcule el error relativo porcentual.

Solución.

$$f(1.37) = 0.743053$$

$$f(1.37) = 0.743, \text{ con tres decimales}$$

#### IV. SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES DE UNA VARIABLE.

##### 4.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

**Definición 1:** Sea  $f$  una función definida en un conjunto  $X$ , de números reales, se dice que  $f$  tiene como **límite** a  $L$  en  $x_0$ , denotado por  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ Tal que } \delta \neq 0 \text{ Siempre que } x \in X \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ Entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$

**Definición 2 :** Sea  $f$  una función definida en un conjunto  $X$ , de número reales y  $x_0 \in X$ , se dice que  $f$  es **continua** en  $x_0$  sí.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ Es decir } \begin{cases} f(x_0) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$$

**Definición 3:** Sea  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ , una sucesión infinita de números reales o complejos. Se dice que la sucesión convergente al número  $x$  (llamado **límite**)



Si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n > N(\varepsilon) \rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x$ , o  $x_n \rightarrow x$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , significa  $\{X_n\}_{n \rightarrow \infty}^\infty$  converge a  $x$

Ejemplo: sea la sucesión  $\{x_n\} = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

**Teorema 1: (Relación de continuidad y convergencia)**

Si  $f$  es una función definida en un conjunto  $X$  de números reales  $x_0 \in X$  entonces los enunciados son equivalentes.

- i.  $f$  es continua en  $x_0$
- ii. Si  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ , es cualquier sucesión  $X$  convergente a  $x_0$ , Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

**Observación 1:** Si  $f$  es una función definida en un intervalo abierto  $\langle a, b \rangle$  que contiene a  $x_0$  se dice que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  sí.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \exists(\text{existe});$  Cuando este límite existe se denota por  $f'(x_0)$

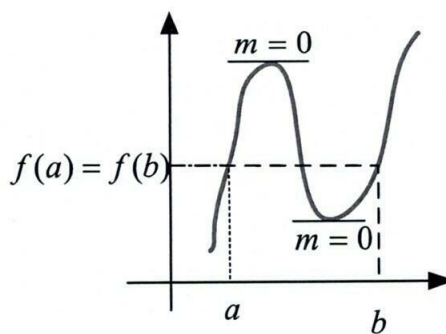
Se conoce como la derivada de  $f$  en el punto  $x_0$

Se dice que  $f$  es una función diferenciable en  $\langle a, b \rangle$  si la función tiene derivada en  $[a, b]$

**Teorema 2: (Teorema de Rolle)**

Sea  $f \in C[a, b]$  y es diferenciable en  $\langle a, b \rangle$ . Si

$f(a) = f(b)$ , entonces existe un número  $c \in \langle a, b \rangle$  Tal que  $f'(c) = 0$



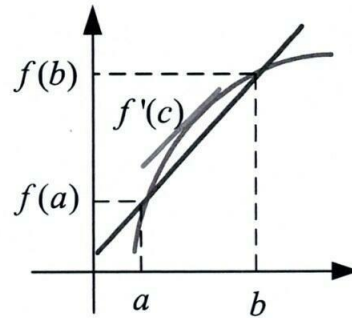


**Teorema 3: (Teorema del Valor Medio)**

Sea  $f \in C[a, b]$  y es diferenciable en  $\langle a, b \rangle$ .

Entonces  $\exists c \in \langle a, b \rangle$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



**Teorema 4 (Teorema Del Valor Extremo)**

Sea  $f \in C[a, b]$ , entonces existe  $c_1, c_2 \in [a, b]$  y tales que  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Si además,  $f$  es diferenciable en  $\langle a, b \rangle$  entonces los números  $c_1$  y  $c_2$  ocurren ya sea en los extremos de  $[a, b]$ , o donde  $f'$  sea cero.

**Teorema 5 (Teorema Del Valor Intermedio)**

Sea  $f \in C[a, b]$ , y  $k$  es un número cualquiera entre  $f(a)$  y  $f(b)$  entonces existe un  $c \in \langle a, b \rangle$  tal que  $f(c) = k$

**Teorema 6 (Teorema de Taylor)**

Sea  $f \in C^n[a, b]$ , y  $f^{n+1}$  existe en  $\langle a, b \rangle$ , sea  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , existe  $\varphi(x)$

Entre  $x_0$  y  $x$  tal que :  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  Donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varphi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1};$$

**Ejercicio 01:** Sea  $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ , demostrar que tiene una raíz en  $\langle 0, 1 \rangle$

**Demostración por el absurdo**

Sea  $c_1 < c_2, \exists c_1, c_2 \in \langle 0, 1 \rangle$  tal que

$$f(c_1) = f(c_2) = 0 \dots \text{por el teorema de Rolle}$$

Siempre que  $f'(c) = 0$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$$

$$f'(c) = 5c^4 + 3c^2 + 2 = 0 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$



Siempre que:

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } p \rightarrow q \cong \text{Si } \sim q \rightarrow \sim p$$

$$2 \geq 0$$

$$3c^2 \geq 0$$

$$5c^4 \geq 0$$

$$\underline{2 + 3c^2 + 5c^4 \geq 0}$$

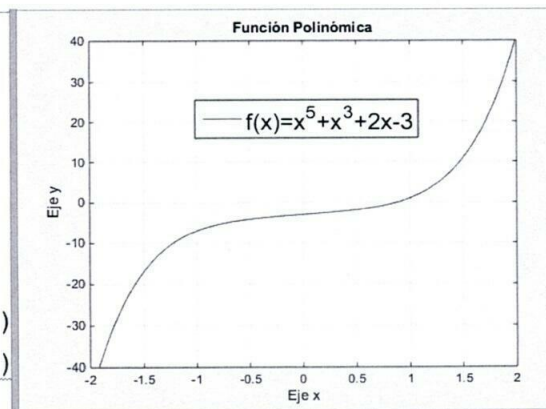
Por lo tanto  $\exists c \in <0, 1>$

### Gráfico 2.1: programación en Matlab

```

- x=-2:0.001:2;
- y=x.^5+x.^3+2*x-3;
- plot(x,y,'r')
- grid
- ylim([-40 40])
- xlabel('Eje x')
- ylabel('Eje y')
- title('Función Polinómica')
- legend('f(x)=x^5+x^3+2x-3')

```



**Ejemplo 02:** Ubicar la raíz de la ecuación  $f(x) = 2 - x - \ln x = 0$ , en el intervalo de longitud menor  $<0, 4>$

### Solución.

$$2 - x - \ln x = 0$$

$$f(x) = 2 - x - \ln x$$

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Analizaremos en  $[1, 2]$  y diferenciable en  $<1, 2>$

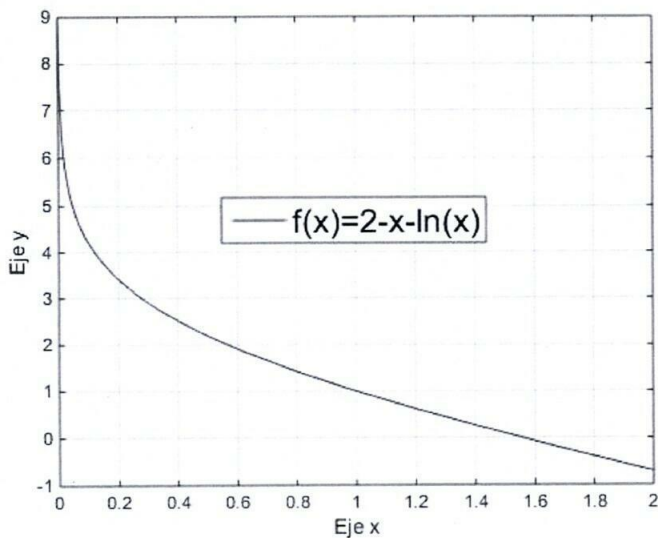
$$\text{Entonces } \exists c \in <a, b> \text{ Tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = -0,6931 \end{array} \right\} \text{reemplazando } f'(c) = \frac{-0,6931 - 1}{2 - 1} = -1,6931$$

Por lo tanto:  $c = 1,4430 \approx 1,55$



**Gráfico 2.2: En Matlab**



**Ejemplo 03:** Hallar la raíz real de  $3x^3 + 2x - 4 = 0$ , en un intervalo de longitud menor  $< 0, 4 >$ , demuestre que existe una raíz única;  $y = 3x^3 + 2x - 4$

**Solución.**

a) Hallando la raíz real.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para : } x = 0 \rightarrow f(0) = -4 \\ \quad \quad \quad x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \end{array} \right\} \text{me basta tomar } < 0, 1 >$$

Analizaremos en el intervalo  $[0, 1]$

$f \in C[0, 1]$  y es diferenciable en  $< 0, 1 >$ .

Entonces  $\exists c \in < 0, 1 >$  Tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \dots \text{ Por T.V.M}$$

$$9c^2 + 2 = \frac{1 - (-4)}{1 - 0}$$

$$9c^2 = 3 \rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$c = 0,58$  Se escoge la positiva

Consideremos un intervalo  $< 0.5, 0.9 >$



.....  
 .....

b) Demostración por el absurdo

Sea  $c_1 < c_2, \exists c_1, c_2 \in \langle 0, 1 \rangle$  tal que  $f(c_1) = f(c_2) = 0$  ..... por el teorema de Rolle

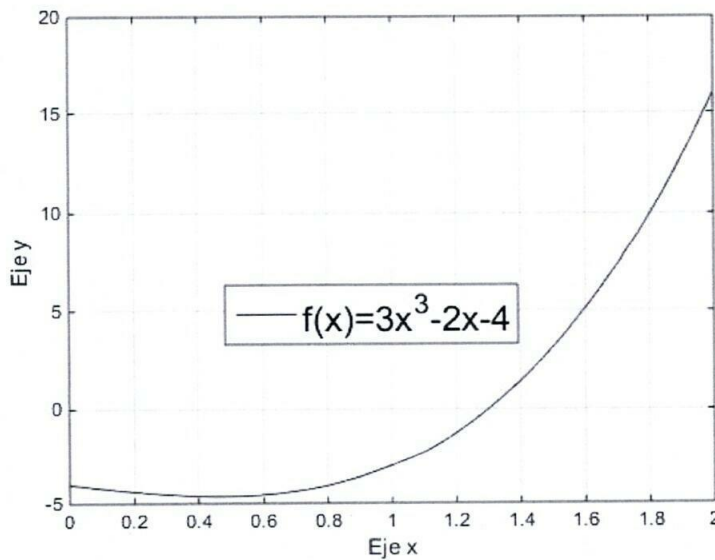
Siempre que  $f'(c) = 0$ , entonces  $f'(c) = 9c^2 + 2 = 0$

Siempre que:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Si } p \rightarrow q \cong \text{Si } \sim q \rightarrow \sim p \end{array} \right\} \rightarrow \frac{9c^2 \geq 0}{2 + 9c^2 \geq 0}$$

Por lo tanto  $\exists c' \in \langle 0.8, 0.99 \rangle$  tal que  $c' \in [0, 1]$

**Gráfico 2.3: En Matlab**



*Handwritten signature*

**Ejemplo 04:** Hallar el polinomio de Taylor de grado "n", para  $f(x) = e^x$ , de  $a = 0$ .

**Solución.**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f(a) = e^a = e^0 = 1$$



$$\begin{aligned}
 f(x) = e^x &\rightarrow f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = e^0 = 1 \\
 f''(x) = e^x &\rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \\
 f'''(x) = e^x &\rightarrow f'''(0) = e^0 = 1 \\
 f^{(4)}(x) = e^x &\rightarrow f^{(4)}(0) = e^0 = 1 \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(x) = e^x &\rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor se define por:

$$P_n(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$$

**Ejemplo 05:** Hallar el polinomio de Taylor de grado "n", para  $f(x) = \ln(x+1)$ ,  $a = 0$ .

Solución

$$f(x) = \ln(x+1) \rightarrow f(0) = \ln(0+1) = 0$$

$$f(x) = \ln(x+1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x+1} = -1(x+1)^{-1} \rightarrow f''(0) = -1(0+1)^{-1} = -1$$

$$f'''(x) = 1(x+1)^{-2} \rightarrow f'''(0) = 1(0+1)^{-2} = 1$$

$$f^{(4)}(x) = -2(x+1)^{-3} \rightarrow f^{(4)}(0) = -2(0+1)^{-3} = -2$$

$$f^{(5)}(x) = 6(x+1)^{-4} \rightarrow f^{(5)}(0) = 6(0+1)^{-4} = 6$$

$$f^{(6)}(x) = -24(x+1)^{-5} \rightarrow f^{(6)}(0) = -24(0+1)^{-5} = -24$$

⋮

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$



$$P_n(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3 + \frac{-6}{4!}(x-0)^4 + \frac{24}{5!}(x-0)^5 + \frac{-120}{6!}(x-0)^6 + \dots$$

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{2! \cdot 3}x^3 - \frac{6}{3! \cdot 4}x^4 + \frac{24}{4! \cdot 5}x^5 - \frac{120}{5! \cdot 6}x^6 + \dots$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}x^i}{i!}$$

**Observación 2:** sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y  $f(x) = 0$ , " $r$ " es una raíz de la ecuación entonces  $f(r) = 0$

## 4.2. MÉTODOS CERRADOS

### 4.2.1. MÉTODO DE BÚSQUEDA O MÉTODO AL AZAR.

Sea  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es continua en  $[a, b]$

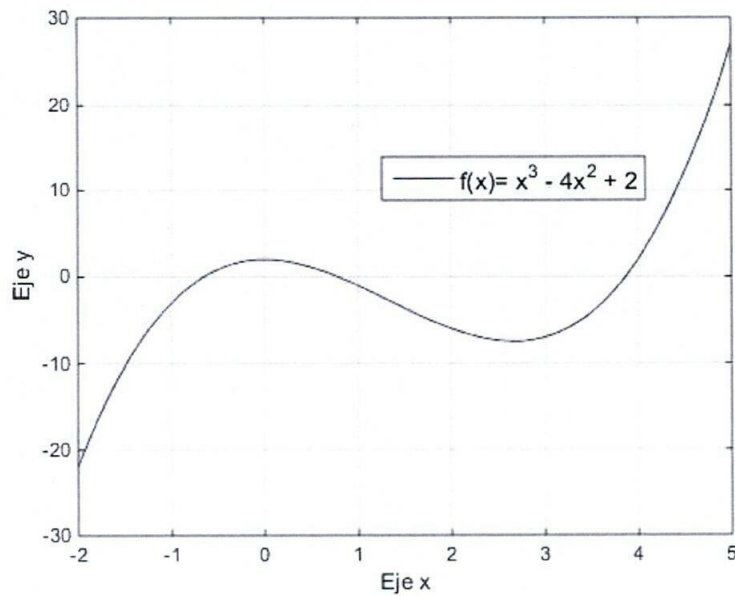
1.  $f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow ]a, b[$  contiene una raíz dada, en general un número impar de veces.
2.  $f(a) \cdot f(b) > 0 \rightarrow [a, b]$  No contiene raíces.
3. Si  $f'(x)$ , tiene un signo determinado (creciente o decreciente), en un intervalo dado y si además el signo de  $f(a)$  es igual al signo  $f(b)$  entonces  $[a, b]$  hay una sola raíz.  $f(x) = 0$ , y si el signo es igual (es decir no es creciente ni decreciente) con seguridad no hay ninguna raíz en un intervalo dado.

**Ejemplo 01:** Separar y hallar las raíces.  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$

#### Solución

Analizaremos para los intervalos  $< -1, 0 >$ ;  $< 0, 1 >$ ;  $< 3, 4 >$

**Gráfico 2.4:** En Matlab

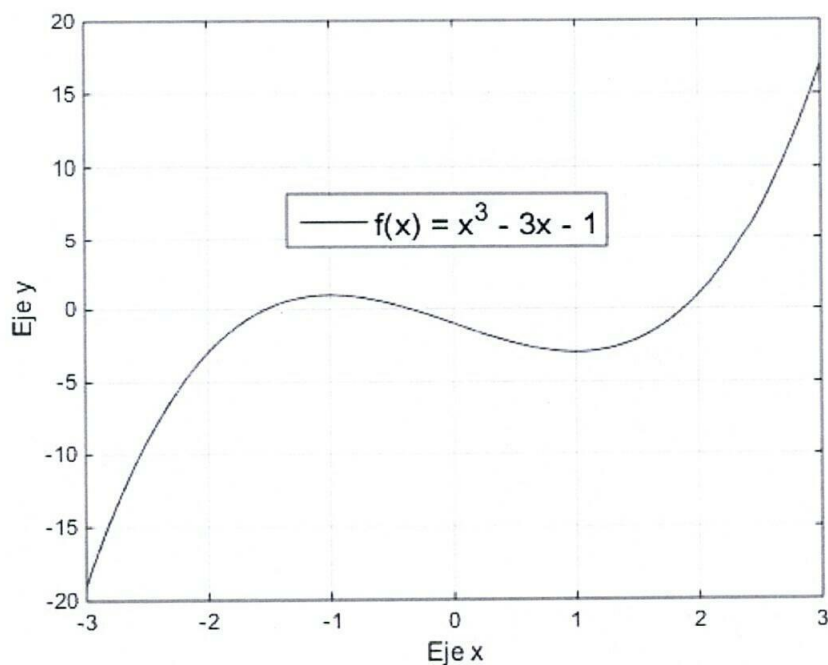


**Ejemplo 02:** Separar y hallar las raíces.  $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Solución

Analizaremos para los intervalos  $\langle -2, -1 \rangle$ ;  $\langle -1, 0 \rangle$ ;  $\langle 1, 2 \rangle$

**Gráfico 2.5: En Matlab**



*Handwritten signature and scribbles in blue ink.*



### 4.2.2. MÉTODO DE LOCALIZACIÓN

Sea  $y = f(x)$ , continua en  $[a, b]$ , donde al menos se encuentra a una raíz de  $f(x) = 0$ . El método consiste en lo siguiente

- i. Descomponer la función dada en dos y de acuerdo a nuestra conveniencia:

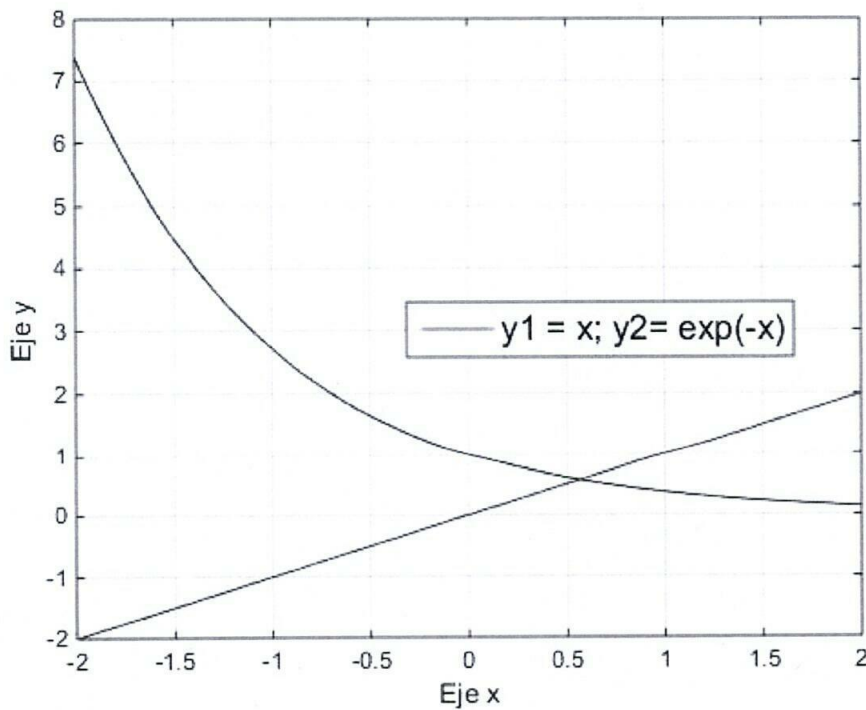
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$$

- ii. Graficar las funciones descompuestas  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$
- iii. La solución es donde se intersectan  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$

**Ejemplo 03:** Hallar la raíz en  $xe^x - 1 = 0$

#### Solución

**Gráfico 2.6: En Matlab**



*[Firma manuscrita]*

*[Firma manuscrita]*



$$f(x) = 0$$

$$f(x) = xe^x - 1$$

$$xe^x - 1 = 0$$

$$xe^x = 1$$

$$x = \frac{1}{e^x}$$

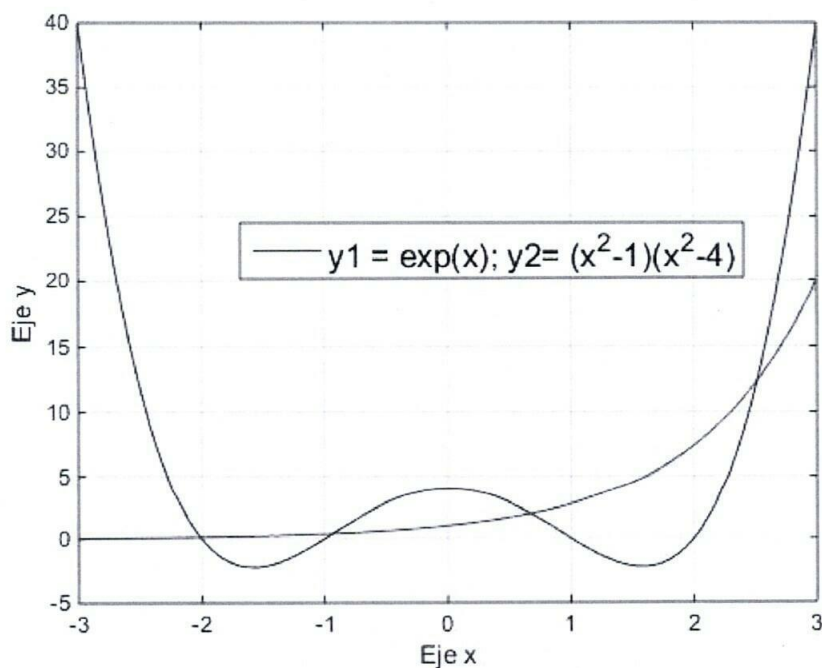
$$x = e^{-x}$$

Por consiguiente, tenemos.

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = e^{-x} \text{ por tanto } c \in [0, 1]$$

**Ejemplo 04:** Localizar la raíz  $e^x - (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

**Solución.**



*Handwritten signature*

*Handwritten signature*

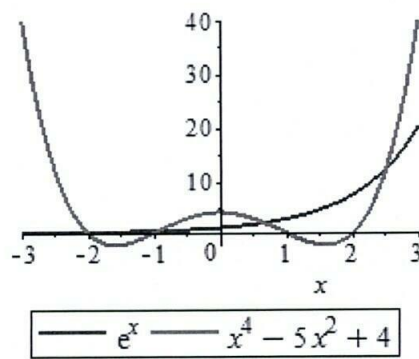
$$e^x - (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$e^x = x^4 - 5x^2 + 4$$

Por consiguiente, tenemos.

$$f_1(x) = e^x; \quad f_2(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Por lo tanto, puedo tomar el intervalo





$$\langle -2.5, -1.5 \rangle \text{ ó } \langle -1.5, 0.5 \rangle \text{ ó } \langle 0, 1 \rangle$$

**Ejemplo 05:** Hallar la raíz  $3 \ln(x) - x = 0$

**Solución**

.....  
 .....  
 .....

**4.2.3. MÉTODO DE BISECCIÓN.**

Sea  $y = f(x)$ , continua en  $[a, b]$ , en el que al menos exista una raíz " $r$ " de  $f(x) = 0$ . En  $[a, b]$  si  $f(a).f(b) < 0$ . El método consiste en lo siguiente.

- i. Hallar  $c = \frac{a+b}{2}$ .
- ii. Evaluamos  $f(c)$
- iii. Reemplazamos los puntos.

$$b = c \text{ si } f(a).f(c) < 0$$

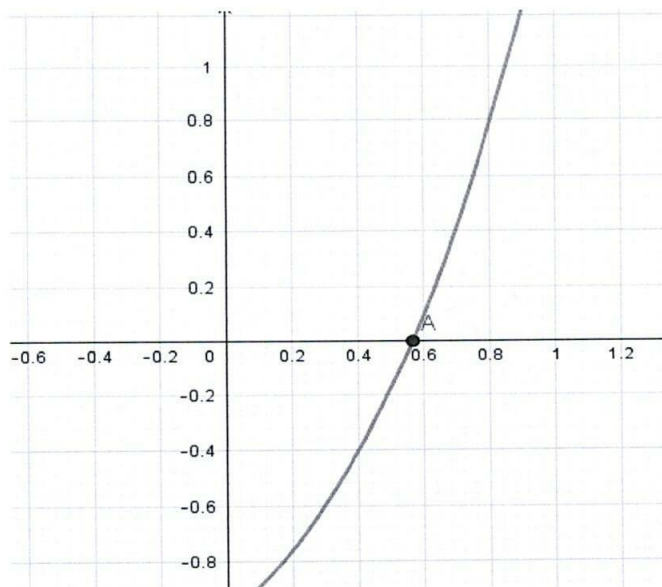
$$a = c \text{ si } f(c).f(b) > 0$$

Nota: La raíz deseada se encuentra utilizando el método indicado, siguiendo el número y criterio establecidos.

*Handwritten signature*

**Ejemplo 06:** Hallar la raíz en  $x e^x - 1 = 0$  con una longitud menor de 0.05

**Solución**





Asumimos el intervalo  $[0,1]$

$$f(x) = xe^x - 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \cdot e^0 - 1 = -1 \\ f(1) = 1 \cdot e^1 - 1 = 1.72 \end{cases} \text{ como } f(0) \cdot f(1) < 0 \rightarrow \exists c_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$f(0.5) = -0.176, \text{ asumiendo } f(0.5) \cdot f(1) < 0 \rightarrow \exists c_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

$$f(0.75) = 0.585, \text{ asumiendo } f(0.5) \cdot f(0.75) < 0 \rightarrow \exists c_3 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$$

$$f(0.625) = 0.168, \text{ asumiendo } f(0.5) \cdot f(0.625) < 0 \rightarrow \exists c_4 = \frac{0.5+0.625}{2} = 0.563$$

$$\varepsilon = |c_4 - c_3| = |0.563 - 0.625| = 0.062 > 0.05 = \tau, \text{ por tanto, continuamos}$$

$$f(0.563) = -0.013, \text{ asumiendo } f(0.563) \cdot f(0.625) < 0 \rightarrow \exists c_5 = \frac{0.563+0.625}{2} = 0.594$$

$$f(0.594) = 0.076, \text{ asumiendo } f(0.563) \cdot f(0.594) < 0 \rightarrow \exists c_6 = \frac{0.563+0.594}{2} = 0.579$$

$$\varepsilon = |c_6 - c_5| = |0.579 - 0.594| = 0.015 < 0.05 = \tau$$

Por lo tanto, la raíz buscada será:  $c_6 = 0.579$

Usando tabla

Intervalo	$a$	$b$	$c$	$f(a)$	$f(c)$	Producto
$[0,1]$	0	1	0.5	-1	-0.176	+
$[0.5, 1]$	0.5	1	0.75	-0.76	0.588	-
$[0.5, 0.75]$	0.5	0.75	0.625			
$\vdots$						

**Ejemplo 07:** Hallar la raíz en  $f(x) = e^x - \text{sen}(x)$ . En  $[-8, -4]$ ,

- Encontrar un intervalo  $[a_0, b_0] \subset [-8, -4]$
- Que la longitud del intervalo sea menor de 0.05

Solución.

Asumiremos  $[-8, -6]$

.....



**4.2.4. MÉTODO DE REGULA FALSI. (Partes proporcionales o de posición falsa.)**

Sea  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es continua en  $[a, b]$  si  $f(a)f(b) < 0$  entonces  $\exists c \in (a, b)$  tq'

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Donde se reemplaza

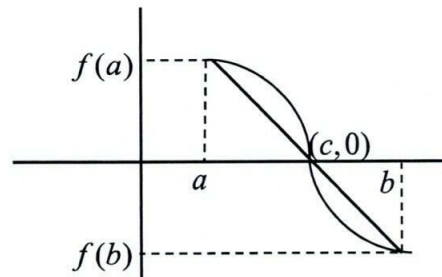
$$\begin{cases} b = c, & \text{si } f(a) \cdot f(c) < 0 \text{ (Acotación por Derecha)} \\ a = c, & \text{si } f(c) \cdot f(b) > 0 \text{ (Acotación por Izquierda)} \end{cases}$$

Demostración

La ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$



**Ejemplo 08:** Hallar la raíz de  $xe^x - 1 = 0$  con un error menor a 0.05

Solución.

$$f(x) = xe^x - 1$$

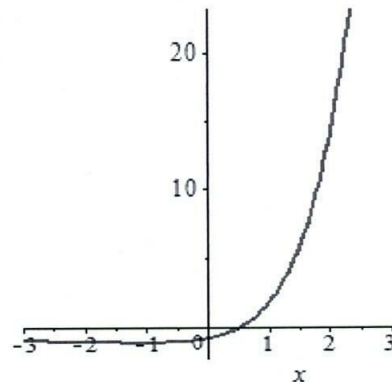
$x$	0	1
$f(x)$	-1	1.7183

$$x \in (0, 1)$$

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$c = \frac{0(1.71828) - 1(-1)}{1 + 1.71828} = 0.367881$$



$i$	$a$	$b$	$c$	$f(a)$	$f(c)$	Producto
1	0	1	0.36738	-1	-0.46854	+
2	0.36738	1	0.50331	-0.46854	-0.46854	+
3	0.50331	1				
4						
5						
6						



### 4.3. MÉTODOS ABIERTOS

#### 4.3.1. MÉTODO DE ITERACIÓN DEL PUNTO FIJO. (o sustituciones sucesivas)

Sea  $f(x) = 0$  una ecuación, donde  $f$  es continua en  $[a, b]$ , si existe una raíz en  $[a, b]$ , entonces  $f(a).f(b) < 0$ . El método consiste en lo siguiente.

- i. Dado  $f(x) = 0$ , despejamos de alguna manera un  $x = g(x)$ .
- ii. El algoritmo a utilizar es  $x_{n+1} = g(x_n)$
- iii. Repetimos el procedimiento tantas veces como sea necesario para lograr la precisión deseada en la raíz y asegurar la convergencia del método. El criterio de convergencia es  $|g'(x)| < 1$ , partiendo de un valor inicial  $x_0$ ,  $|g'(x)| < 1$

Observación:

$$\left. \begin{array}{l} a) |x_{n+1} - x_n| \\ b) \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \end{array} \right\} \text{Tolerancia de...}$$

**Ejemplo 01:** Hallar una raíz de la ecuación  $e^x - 2x - 21 = 0$ ; con un error de  $1 \times 10^{-6}$

Solución.

- i. Método de la búsqueda.

$x$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	-	-	-	+	

Solución gráfica.

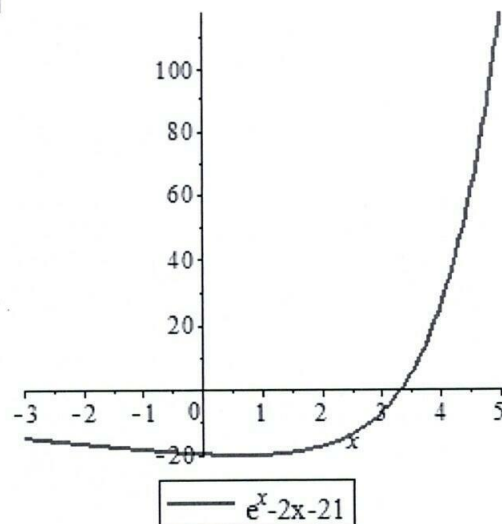
- ii. Creando el algoritmo

$$e^x - 21 = 2x \rightarrow x = \frac{e^x - 21}{2}$$

$$g(x) = \frac{e^x - 21}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n} - 21}{2}$$

- iii.  $g'(x) = \frac{e^x}{2}$ ,  $x_0 = 3$





$$|g'(x)| = \left| \frac{e^3}{2} \right| = 10.04 > 1$$

No cumple con el paso (iii) volvemos a buscar.

ii. Buscando el algoritmo.

$$e^x = 21 + 2x \rightarrow \ln(e^x) = \ln(21 + 2x)$$

$$x = \ln(21 + 2x)$$

$$g(x) = \ln(21 + 2x)$$

iii. Derivando.

$$g'(x) = \frac{2}{2x + 21}, \quad x_0 = 3$$

$$|g'(x)| = \left| \frac{2}{2(3) + 21} \right| = \frac{2}{27} < 1, \quad x_0 = 3$$

Entonces pasamos a utilizar el algoritmo

$$x_{n+1} = \ln(21 + 2x_n)$$

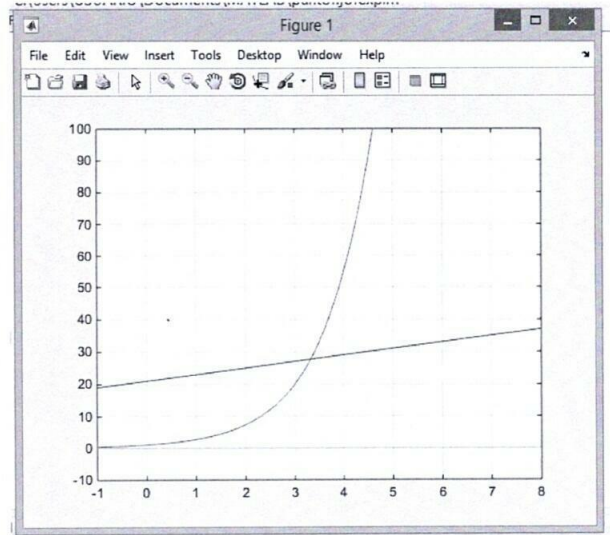
$i$	$x_i$	$g(x_i)$
0	3	3.295836866
1	3.295836866	3.317514051
2	3.317514051	3.319084102
3	3.319084102	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Utilizando software Matlab



```

Editor - C:\Users\USUARIO\Documents\MATLAB\puntofijofexp.m
NewtonRapsonfP.m x puntofijocosx.m x tailor cualquier.m x puntofijofexp.m x +
1 % punto fijo
2 % y=exp(x)-2x-21
3 - x=-1:0.1:8;
4 - y=exp(x);
5 - z=21+2*x;
6 - t=zeros(size(x));
7 - plot(x,y)
8 - axis([-1 8 -10 100])
9 - hold on
10 - plot(x,z)
11 - plot(x,t)
12 - grid
13 - x0=3;
14 - for i=1:10
15 -     x=log(21+2*x0);
16 -     f=abs(exp(x0)-2*x0-21);
17 -     disp([x0,x,f]);
18 -     x0=x;
19 - end
    
```



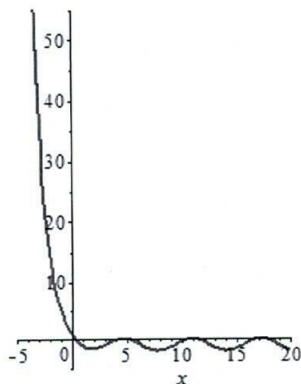
```

Command Window
>> puntofijofexp
3.0000 3.2958 6.9145
3.2958 3.3175 0.5917
3.3175 3.3191 0.0434
3.3191 3.3192 0.0031
3.3192 3.3192 0.0002
3.3192 3.3192 0.0000
3.3192 3.3192 0.0000
3.3192 3.3192 0.0000
3.3192 3.3192 0.0000
3.3192 3.3192 0.0000
    
```

*Handwritten signature*

**Ejemplo 02:** hallar una raíz de:  $2e^{-x} - \text{sen}(x) = 0$  sugerencia en primer lugar separe las raíces por el método de la localización., con una tolerancia de  $1 \times 10^{-4}$

Solución.





$$2e^{-x} - \text{sen}(x) = 0 \rightarrow \ln(e^{-x}) = \ln\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right)$$

$$-x = \ln\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right)$$

$$x = -\ln\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right)$$

$$g(x) = -\ln\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right)$$

Analizando la derivada en el punto  $x_0 = 2$

$$g'(x) = -\frac{\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}}{2} = -\frac{\cot(x)}{2}$$

$$\text{Para } x_0 = 2 \rightarrow |g'(x)| = |-\cot(x)| = |-0.46| < 1$$

$$\text{Entonces } x = -\ln\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\text{sen}(x)}\right)$$

$$x_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{\text{sen}(x_n)}\right)$$

**Ejemplo 03:** encuentre la raíz real positiva de  $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$ , con una tolerancia de  $10^{-4}$  para la variable  $x$ .

*Handwritten signature*

*Handwritten scribble*

$$x = \ln(x) + 2$$

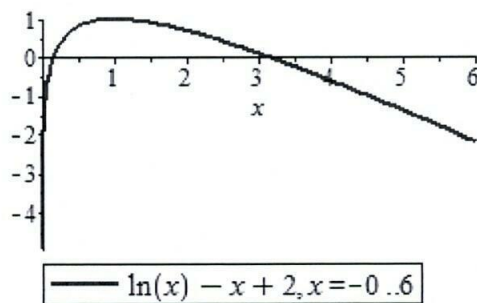
$$g(x) = \ln(x) + 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 3$$

$$|g'(3)| = \left|\frac{1}{3}\right| = |0,333| < 1$$

$$x_{k+1} = \ln(x_k) + 2$$

**Solución.**



**4.3.2. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON.**

Este método está basado en la serie de Taylor que se genera a partir de una raíz  $x_0$  para la

función  $f(x)$ . Donde se cumple que  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Demostración**

Sabemos que  $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = m$$

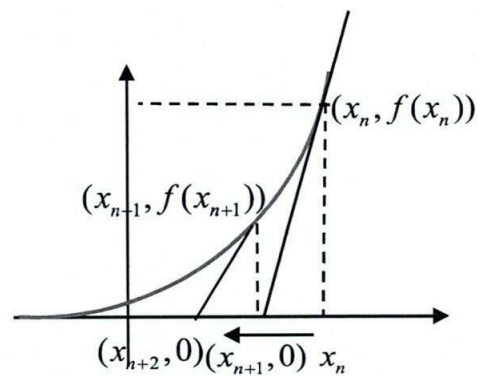
En el grafico se cumple q

$$m = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



**Ejemplo 04:** usando el método de las tangentes (Newton y Raphson). Hallar una raíz en  $x - e^{-x} = 0$ . Con una tolerancia de  $1 \times 10^{-6}$

**Solución.**

Sea  $f(x) = x - e^{-x}$ , aplicando el método de N-R

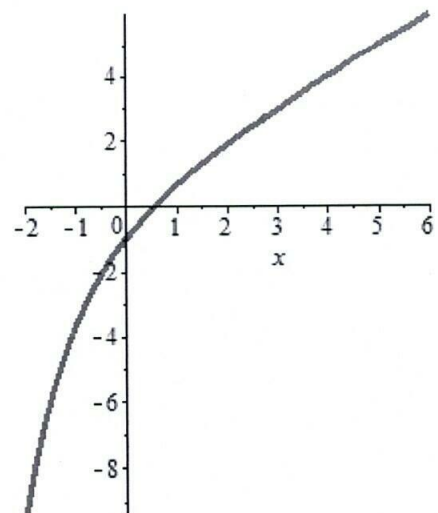
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x_n) = x_n - e^{-x_n}$$

$$f'(x_n) = 1 + e^{-x_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{1 + e^{-x_n}}; x_0 = 0$$



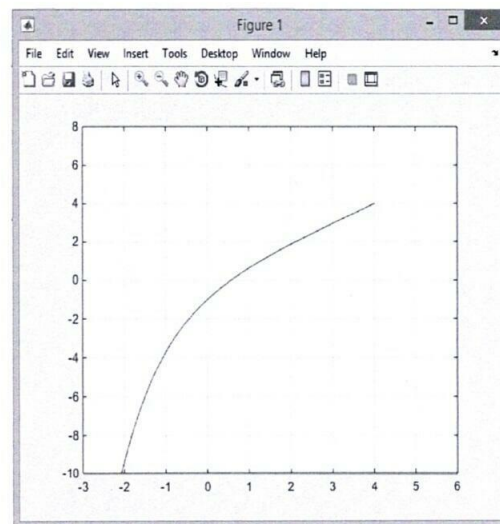


i	$x_i$	$x_{i+1}$
0	0	0,5
1		

Utilizando Software MatLab.

```

Editor - C:\Users\USUARIO\Documents\MATLAB\Newtonfexptri.m
NewtonRapsonP.m x Newtonfexptri.m x +
1 %Newton y Raphson ftrigon y exp
2 - x=-4:0.1:4;
3 - y=x-exp(-x);
4 - plot(x,y)
5 - axis([-3 6 -10 8])
6 - hold on
7 - plot(x,y)
8 - grid
9 - format long
10 - x0=0;
11 - for i=1:5
12 -     f=x0-exp(-x0);
13 -     df=1+exp(-x0);
14 -     ddf=-exp(-x0);
15 -     x=x0-f/df;
16 -     dist=abs(x-x0);
17 -     dg=abs(1-(f*df*df-f*ddf)/df*df);
18 -     disp([x,dist,dg])
19 -     x0=x;
20 - end
    
```



```

Command Window
>> Newtonfexptri
0.5000000000000000    0.5000000000000000    6.0000000000000000
0.566311003197218    0.066311003197218    1.339563433220719
0.567143165034862    0.000832161837644    1.003946186398632
0.567143290409781    0.000000125374919    1.000000593976514
0.567143290409784    0.0000000000000003    1.0000000000000014
    
```

*Handwritten signature*

*Handwritten signature*



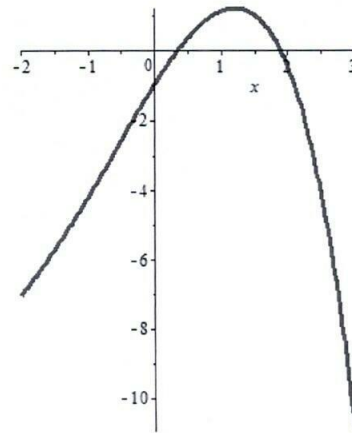
**Ejemplo 05:** Hallar una raíz de  $3x + \text{sen}(x) - e^x = 0$  Con una tolerancia de  $1 \times 10^{-6}$

**Solución**

$f(x) = 0$

$3x + \text{sen}(x) - e^x = 0$

$x$	0	1
$f(x)$	-1	0.2991



Entonces existe  $c \in (0, 1)$  tal que

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  Donde:

$f(x) = 3x + \text{sen}(x) - e^x$

$f'(x) = 3 + \cos(x) - e^x$

$i$	$x_i$	$x_{i+1}$
0	0	
1		

**4.3.3. CRITERIO DE CONVERGENCIA**

$|g'(x)| \leq 1 \rightarrow \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Deducción del criterio de la convergencia.

$x_{n+1} = g(x_n)$  ..... Método pto fijo

$|g'(x_n)| < 1$  ..... Método pto fijo

$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$  ..... sustitución Newton

Derivando.



$$g'(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x)}{[f'(x_n)]^2}$$

$$|g'(x_n)| = \left| \frac{f(x_n)f''(x)}{[f'(x_n)]^2} \right| < 1$$

#### 4.3.4. MÉTODO DE LA SECANTE.

Sea  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe una raíz en  $[a, b]$  de la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

#### Demostración.

Sabemos que:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \dots\dots\dots * _1$$

$$m = \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots * _2$$

Igualando  $* _1 = * _2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-(x_1 - x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

⋮

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

*Handwritten signature*

*Handwritten mark*

**Ejemplo 06:** Utilizando el método de la secante encontrar una raíz positiva.  $\ln(x) - x + 2 = 0$ , para valores iniciales  $x_0 = 3$ ,  $x_1 = 3,15$  con tolerancia  $10^{-4}$

#### **Solución.**

Sea  $f(x) = \ln(x) - x + 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



$$x_2 = 3,15 - \frac{(\ln(3.15) - 3.15 + 2)(3.15 - 3)}{(\ln(3.15) - 3.15 + 2) - (\ln(3) - 3 + 2)}$$

$$x_2 = 3.146150255$$

$|x_2 - x_1| = |3.146150255 - 3.15| = 0.849745 \times 10^{-3}$ , como este valor es mayor que la tolerancia por lo tanto se continúa haciendo iteraciones.

$$x_3 = 3.146150255 - \dots$$

#### 4.3.5. MÉTODO DE NEWTON DE SEGUNDO ORDEN.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

##### Demostración.

Por el polinomio de Taylor. Tenemos.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Para un polinomio de orden 1.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow (x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para un polinomio de orden 2.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Sea  $(x - x_0) = \Delta x$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado



$$\Delta x = \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

Reemplazando

$$(x - x_0) = \Delta x$$

$$x - x_0 = \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \pm \frac{\sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0)f(x_0)}}{f''(x_0)}$$

⋮

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

**Ejemplo 07:** Utilizando el método de Newton de segundo orden, encontrar una raíz positiva.  $\ln(x) - x + 2 = 0$ , para valores iniciales  $x_0 = 3$ , con tolerancia  $10^{-4}$

**Solución.**

$$f(x) = \ln(x) - x + 2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(3) = \ln(3) - 3 + 2 = \ln(3) - 1$$

$$f'(3) = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{3^2} = \frac{-1}{9}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \pm \frac{\sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n)f(x_n)}}{f''(x_n)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(-2/3)}{(-1/9)} \pm \frac{\sqrt{(-2/3)^2 - 2(-1/9)(\ln(3)-1)}}{(-1/9)}$$

$$x_1 = 3.146138722$$

$$x_2 = 3.14613$$



### 4.3.6. RAÍCES DE POLINOMIOS

Dada la ecuación  $P_n(x) = 0$ . Hallamos sus raíces aplicando el siguiente algoritmo.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)}, \text{ con } i = 0 \dots n$$

Donde  $P(x_i)$  y  $P'(x_i)$ , se hallan de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & & & & & & \downarrow (+) \\
 x_i & & x_i b_{n-1} & x_i b_{n-2} & x_i b_{n-3} & \dots & x_i b_2 & x_i b_1 \\
 \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-3} & \dots & b_1 & P(x_i) \\
 & \downarrow & & & & & & \downarrow (+) \\
 x_i & & x_i c_{n-2} & x_i c_{n-3} & x_i c_{n-4} & \dots & x_i c_1 & \\
 \hline
 & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & c_{n-5} & \dots & & P'(x_i)
 \end{array}$$

**Observación 01:** Se parte de valores iniciales posibles.

**Observación 02:** Este proceso se repite en forma iterativa, y la aproximación al valor de la raíz buscada aumentara conforme se efectúen las iteraciones y valor inicial sea lo más correcto posible.

**Ejemplo 08:** Encontrar una raíz de la ecuación.  $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$  en  $[1, 2]$ , si existe una raíz. Con una tolerancia de  $1 \times 10^{-2}$

**Solución.**

Existe una raíz  $r \in [1, 2]$  tal que  $x_0 = 2$

$$\begin{array}{r|ccc|c}
 & 1 & 1 & -3 & -3 \\
 & \downarrow & & & \downarrow (+) \\
 2 & & 2 & 6 & 6 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 3 & 3 = P(x_0) \\
 & \downarrow & & & \downarrow (+) \\
 2 & & 2 & 10 & \\
 \hline
 & 1 & 5 & & 13 = P'(x_0)
 \end{array}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{3}{13}$$

$$x_1 = 1.769230769$$



	1	1	-3	-3
	↓			↓ (+)
1.769230769	1.769230769	4.899408282	3.360491577	
	1	2.769230769	1.899408282	0.360491577 = $P(x_0)$
	↓		↓ (+)	
1.769230769	1.769230769	8.029585796		
	1	4.538461538	9.928994078 = $P'(x_0)$	

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$$

$$x_2 = 1.769230769 - \frac{0.360491577}{9.928994078}$$

$$x_2 = 1.7329238103$$

$$x_3 =$$

⋮

$$x_n =$$

Regla para hallar el intervalo donde se encuentran las raíces de una ecuación polinómica.

Sea  $P(x) = 0$ , donde  $P(x)$  tiene raíces reales y  $P(x)$  es continua en  $[a, b]$ , el cual al ser evaluado en sus extremos adopta valores numéricos diferentes de cero.

El número de raíces reales que acepte el polinomio dado en el intervalo  $[a, b]$  es  $N(a) - N(b)$  o dicha cantidad; disminuida en número par de asignación que se tenga, para aplicar este teorema, se basa en la llamada regla de (Bauclan Fourier).

Que consta en lo siguiente.

Dado el polinomio  $P_n(x) = 0$  de grado  $n$  a partir de este se establece la sucesión en base a las derivadas.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = g_0(x) \\ P'(x) = g_1(x) \\ P''(x) = g_2(x) \\ \vdots \\ P^k(x) = g_k(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Obtenidas a partir del polinomio} \\ \text{dado con sus respectivas} \\ \text{derivadas, hasta llegar aun valor} \\ \text{numérico constante} \end{array}$$

Observación 3:  $N(x)$  viene a ser la notación del número de signos para en determinado valor.

**Ejemplo 09:** en el siguiente polinomio analizar  $P(x) = x^3 - 1.74x^2 - 2.52x + 3.97$

### Solución



$$g_0(x) = x^3 - 1.74x^2 - 2.52x + 3.97$$

$$g_1(x) = 3x^2 - 3.48x - 2.52$$

$$g_2(x) = 6x - 3.48$$

$$g_3(x) = 6$$

$x$	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$N(x)$	$N(a) - N(b)$
$< -\infty, 0 >$	-	+	-	+	3 cambios de signo	} (3-2)=1 una raíz
0	+	-	-	+	2 cambios de signo	
$< 0, +\infty >$	+	+	+	+	0 cambios de signo	(2-0)=2 raíces

En intervalo desde  $< 0, +\infty >$ , existen dos raíces

En intervalo desde  $< -\infty, 0 >$ ,  $\exists$  una raíz

Por tanto, Como el polinomio es de grado 3, el polinomio tiene 3 raíces

#### 4.3.7. EJERCICIOS PROPUESTOS.

- Hallar una raíz de siete cifras de tolerancia de cierta ecuación  $e^x - (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ , con una tolerancia de  $10^{-6}$  y ocho cifras significativas.
- Utilizando el método de Newton de segundo orden analizar una raíz.  
 $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141$
- Encontrar una raíz aproximada de la ecuación  $x - 2^{-x} = 0$  en  $[0, 1]$ .
- Utilice el método del punto fijo para estimar la solución de las siguientes ecuaciones, con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
  - $\cos x - x = 0$
  - $2 \operatorname{sen} \sqrt{x} - x = 0$ , para  $x_0 = 0.5$
  - $x - e^{-x} = 0$
- Use el método de Newton y Rapshon para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones. Con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-6}$ .
  - $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$
  - $e^{-x} - 1 + \frac{x}{5} = 0$ , para  $x_0 = 5$

*Handwritten signature*

*Handwritten mark*



- c)  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ , con  $x_0 = 0$ .
- d)  $3x^2 - e^x = 0$
- e)  $x^2 + 10 \cos x = 0$
- f)  $e^{-x} - \ln x = 0$
6. Emplee el algoritmo de bisección para determinar las soluciones de:
- a)  $x - 2^{-x} = 0$ , para  $0 \leq x \leq 1$  con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
- b)  $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0$ , para  $1 \leq x \leq 2$  con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
- c)  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ , para  $0 \leq x \leq 1$  con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
- d)  $x \operatorname{sen} x - 1 = 0$
- e) con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
7. Use el método de la secante para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones, con una tolerancia de  $\tau = 1 \times 10^{-4}$ .
- a)  $e^{-x} + 4x^3 - 5 = 0$ , para  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 1$
- b)  $3x + \operatorname{sen} x - e^{-x} = 0$ , para  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 1$
8. Encuentre la raíz positiva de  $f(x) = x^4 - 8x^3 - 35x^2 + 450x - 1001$ , utilizando el método de falsa posición con seis iteraciones.
9. Determine la raíz real más grande de  $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$
- a) En forma gráfica.
- b) Método I.P.F. (cinco iteraciones con  $x_0 = 3$ )
- c) Método Newton y Raphson (cinco iteraciones con  $x_0 = 3$  y  $\varepsilon_a \leq 0.0000001$ )
- d) Método secante (cinco iteraciones con  $x_0 = 3$  y  $x_1 = 3.5$ )
- e) Método de Newton de segundo  $x_0 = 3$   $\varepsilon_a \leq 0.000001$

## V. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Chapra, C. (1988). Métodos Numéricos para Ingenieros, con aplicaciones en computadores personales. Ediciones McGraw Hill, México.

Young, C y et al. (2005). Applied Numerical Methods Using Matlab. Editorial Wiley Interscience, U.S.A.



#### IV. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Doczz . (07 de 09 de 2024). *Doczz*. Obtenido de <https://doczz.es/doc/6145137/guia10.derivada>
- Espinoza. (07 de 09 de 2024). *Análisis II*. Obtenido de <https://idoc.pub/documents/analisis-iiespinozapdf-vnd5gj02gw1x>
- ESPINOZA RAMOS, E. (2008). *ANÁLISIS MATEMÁTICO I*. LIMA: Editorial Servicios Graficos J.J.
- Espinoza Ramos, E. (2022). *Análisis Matemático I - para estudiantes de ciencia e ingeniería*. Lima-Perú.
- Larson, R., & Bruce H. Edwards. (2010). *Cálculo de una variable*. México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES,.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo de una Variable*. México: McGRAW-HILL.
- library. (07 de 09 de 2020). *Derivada y Diferencial teoría*. Obtenido de <https://1library.co/document/q5e1m53q-derivada-y-diferencial-teoria.html>
- Limites y Continuidad*. (07 de 09 de 2024). Obtenido de <https://vsip.info/limites-y-continuidad-10-pdf-free.html>
- Márquez, J. C. (07 de 09 de 2014). *Matemáticas*. Obtenido de <https://idoc.pub/documents/modulo-clei-vi-matematicas-1430q3mvqg4j>
- Matematicasiesoja*. (07 de 09 de 2024). Obtenido de <https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/1253689968clculoinfinitesimalii.doc>
- Pino, A. (07 de 09 de 2020). *Calculos de Larson*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/PINO-ANDRES/calculos-de-larson-novena-edicion>
- Pinto, J. A. (07 de 09 de 2013). *Cálculo Direncial*. Obtenido de <https://doczz.es/doc/1914304/apuntes-de-c%C3%A1lculo-diferencial.-prof.-jaime-a-pinto>.
- Roman, E. (20 de 12 de 2020). *Calculo Diferencial e Integral de una Variable*. Obtenido de <https://www.coursehero.com/file/78168751/Gu%C3%ADa-Aprendizaje-E-Roman-CUV-S10pdf/>
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable*. México: Cengage Learning Editores.
- Thomas, G. B. (2010). *Cálculo de Una Variable*. México: Pearson Education,.
- Videla, D. (07 de 09 de 2024). *Edoc*. Obtenido de <https://edoc.pub/calculo-de-una-variable-conceptos-y-contextos-pdf-free.html>