UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN

COMISIÓN ORGANIZADORA

VICEPRESIDENCIA ACADÉMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE JAÉN

SEPARATA DE DERIVADAS CON ENFOQUE INGENIERIL

Autores:

Mg. Enny Román Castillo

Mg. Frans Fuentes Maza

JAÉN, SETIEMBRE DEL 2024

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

Las derivadas surgieron en el siglo XVIII, aunque de manera algo confusa, como resultado de las investigaciones de las velocidades por parte del científico inglés Isaac Newton y el análisis de tangentes a curvas realizado por el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (Roman, 2020).

En consecuencia, las derivadas proporcionan información resumida y probada a los usuarios, permitiéndoles interpretar y ofrecer datos sobre diversos aspectos de nuestra existencia. Su aplicación abarca desde el vuelo de un avión y el movimiento de un coche hasta la construcción y otros ámbitos cotidianos. Asimismo, las derivadas son cruciales para medir la rapidez del cambio en fenómenos como la temperatura, el crecimiento o decrecimiento de la producción económica, siendo de gran importancia en la ingeniería.

Invitamos a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Jaén a revisar este material académico, pues será muy útil en su formación profesional de pregrado.

Atte. Los autores

II. CONTENIDO TEMÁTICO

- **La función derivada.**
- **Interpretación geométrica.**
- **Definición formal de la derivada**
- **Cálculo de la derivada de una función por definición.**
- **Derivación de funciones algebraicas.**
- **Regla de la cadena**
- **Derivación de funciones trigonométricas**
- **Derivación implícita.**
- **Aplicación de la derivada**
- **Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.**
- **Estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos.**
- **Estudio de la curvatura de una curva y puntos de inflexión.**
- **Resolución de problemas de optimización.**
- **Regla de L´hôpital, para el cálculo de límites**
- **Teoremas de Rolle, teorema del valor medio y sus aplicaciones**
- **Velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo.**
- **Relación entre rapidez de variación de variables relacionada.**

III. DERIVADAS

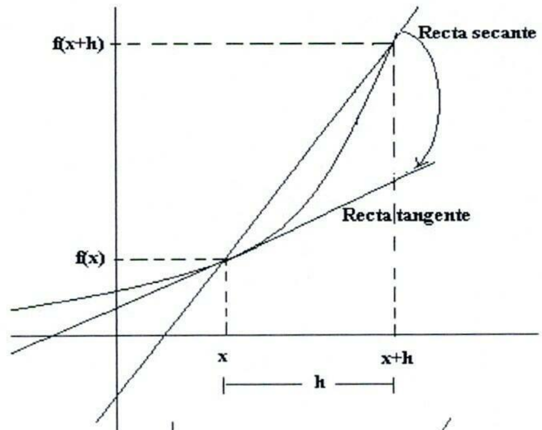
3.1. DERIVADA DE UNA FUNCION

3.1.1. PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE

Definición:

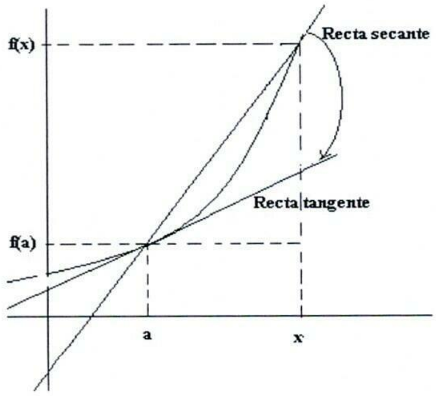
La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\,(x, f(x))$ es (Doczz , 2024):

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$



OTRA DEFINICIÓN

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es (Doczz , 2024): $\boxed{m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$



Ejemplo 01: Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4,2) (Doczz , 2024).

Solución

Hallando la pendiente de la recta tangente usando límites:

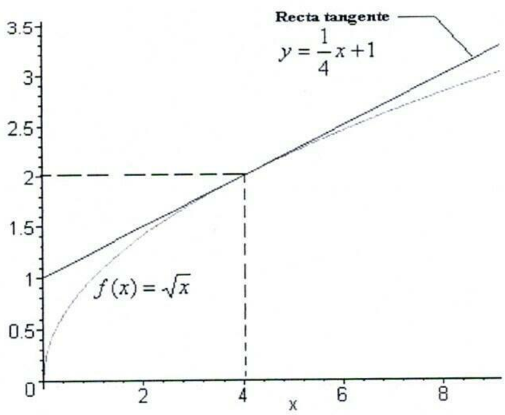
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$



Seguido se encuentra la ecuación de la recta con la expresión: $\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$ (Pinto, 2013)

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$ (Pinto, 2013).

Por lo tanto, la ecuación será: $y = \frac{1}{4}x + 1$

3.1.2. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

Sea $f(x)$ una función real de variable real, si $x \in D_f$ La pendiente de la recta tangente (m) en un punto particular se llama derivada de f en ese punto y se representa como.:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

= Derivada de f en el punto $(x, f(x))$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Se da cuando existe el límite.

El proceso de encontrar la derivada se llama **"diferenciación"**

Notación

Sea $y = f(x)$ una función, notamos la derivada así:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f_x$$

En un punto particular $(a, f(a))$ escribimos: $f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

Ejemplo 02: Halle la derivada de $y = x^2$ en $x = 2$ (Pinto, 2013).

solución

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

$$Entonces: \quad y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Evaluando $x = 2$ la derivada es: $y' = 2x \rightarrow y'(2) = 2(2) = 4$.

Ejemplo 03: Halle la derivada de $y = x^3$.

Solución

$$y' = \frac{d}{dx}(x^3) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

(Doczz , 2024)

$$Entonces: \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Ejemplo 04. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$.

En los puntos de abscisa: -2,-1,0,1,2,3,4 (Limites y Continuidad, 2024).

Solución

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)\cancel{h}}{\cancel{h}}$$
$$=2x-2$$

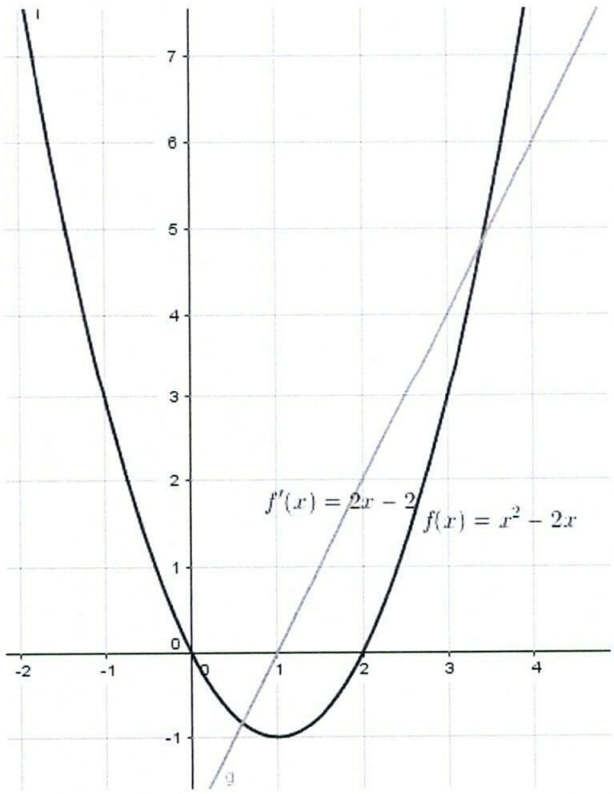
Para la función $f(x)=x^2-2x$, su derivada $f'(x)=2x-2$ en los puntos dados valen:

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Los puntos de la tabla anterior: (-2,-6); (-1,-4); ....;(4,6). Corresponden todos a la gráfica de la recta de ecuación: $y=2x-2$ (Márquez, 2014).

para la comprobación se debe de obtener la expresión de la derivada de f en un punto cualquiera x mediante el cálculo del límite que ya conocemos. (Matematicasiesoja, 2024)

x	f(x)	f'(x)
-6	48,0000	-14,0000
-5	35,0000	-12,0000
-4	24,0000	-10,0000
-3	15,0000	-8,0000
-2	8,0000	-6,0000
-1	3,0000	-4,0000
0	0	-2,0000
1	-1,0000	0
2	0	2,0000
3	3,0000	4,0000
4	8,0000	6,0000
5	15,0000	8,0000
6	24,0000	10,0000



3.1.3. DERIVADAS LATERALES.

Sea $f: R \to R$, una fusión y $a \in D_f$

Se confirma que la derivada de una función en un punto, $f'(a)$, se obtiene como un límite (Márquez, 2014).

Para que este límite exista, sabemos que han de existir los límites laterales correspondientes, que en este caso se les denomina **derivadas laterales** y se obtienen (Limites y Continuidad, 2024):

$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la derivada por la izquierda de $f(x)$ en a

$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la derivada por la derecha de $f(x)$ en a.

Si las derivadas laterales tienen el mismo valor, es decir, $f'(a^-) = f'(a^+)$ diremos que la función $f(x)$ **es derivable en** a y su valor es: $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$

Ejemplo 05: Sea la función $g(x) = x^2$. Calcula la derivada, si existe, en el punto $a = 1$ (Márquez, 2014).

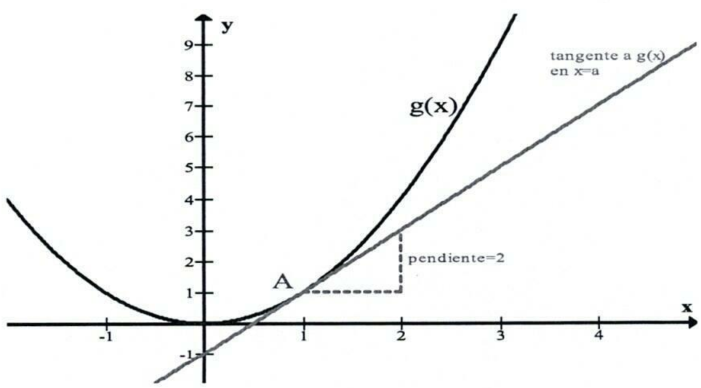
Solución

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2$$

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2$$

$$g'(1^-) = g'(1^+) = g'(1) = 2$$

La función $g(x) = x^2$ **es derivable en** $a = 1$ y su derivada vale: 2 (Márquez, 2014). Se sabe que es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de la abscisa $a = 1$ (Limites y Continuidad, 2024).



3.1.4. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él (Márquez, 2014). Acabamos de ver en el ejemplo anterior para $g(x)=x^2$, que **es continua en** $x=0$, sin embargo, **no es derivable en** $x=0$ (*en ese punto la recta tangente es perpendicular*) (Limites y Continuidad, 2024).

Ejemplo 06: Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\leq 1 \\ x+2 & si \quad x>1 \end{cases}$

Analizar su continuidad y es derivable para x=1

Solución

i) Analizando la continuidad en $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=3$, por lo tanto, f es continua.

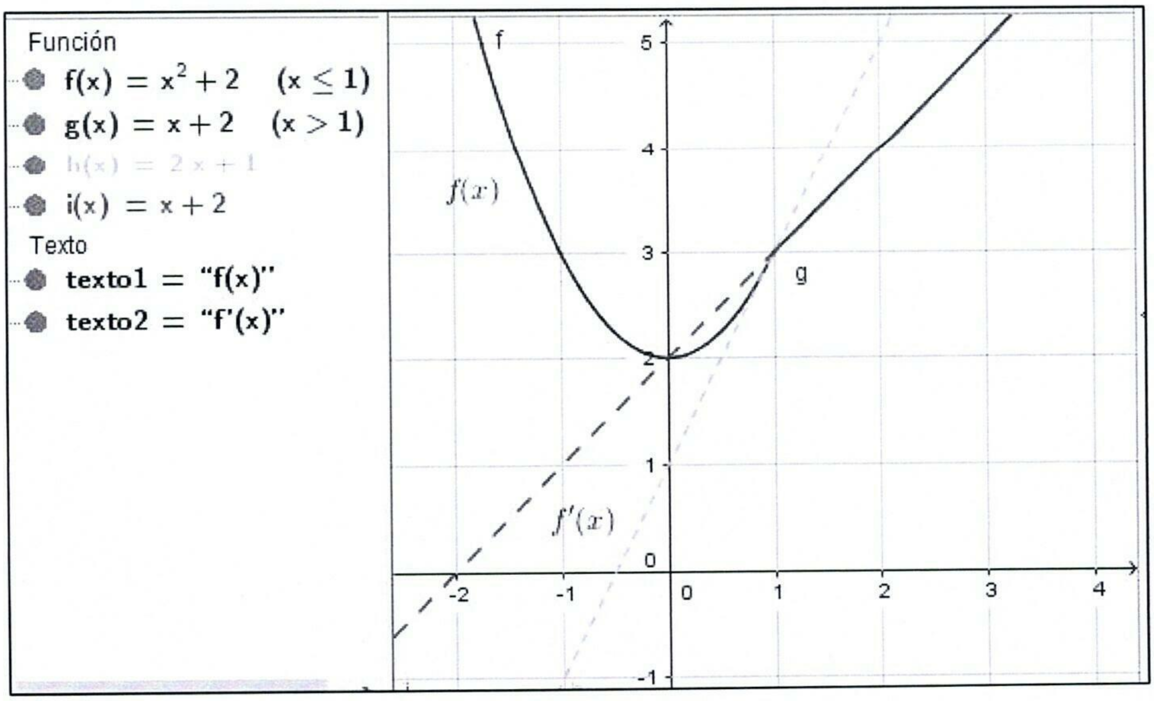
ii) Analizando si f **es diferenciable en x=1**

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[(1+h)^2+2]-[1^2+2]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[(1+h)+2]-[1+2]}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)$ entonces se cumple que no existe $f'(1)$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=1$.



Observación:

Si una función f es continua en a no necesariamente es diferenciable en a.

Si una función f es derivable en a necesariamente es continua en a.

Teorema 01:

Sea f una función y $x_0 \in D_f$. Si f es diferenciable en x_0 entonces f es continua en x_0 (Espinoza Ramos, 2022).

Generalización

Si usamos límites para hallar la derivada de $y = x^n$ obtenemos: $y' = n x^{n-1}$, es decir:

Si $\boxed{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}}$

3.1.5. PROPIEDADES DE DERIVACIÓN

Sean *f*, *g* dos funciones entonces se cumple que

1. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
2. $\frac{d}{dx} k.f(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$
3. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x).\frac{d}{dx} g(x)$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx} f(x) - f(x)\frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}; \quad g(x) \neq 0$
5. **Si** $y = f(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$
6. **Si** $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
7. **Si** $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
8. **Si** $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)\ ; a > 0,\ a \neq 1$
9. **Si** $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
10. **Si** $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e,\ x > 0$

Ejemplo 07: Hallar la derivada de $f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^2 - 6)$

Solución

Aplicando la propiedad (4)

$f(x)=(x^3-2x^2)(x^2-6)$

$f'(x)=(x^3-2x^2)'(x^2-6)+(x^3-2x^2)(x^2-6)'$

$f'(x)=(3x^2-4x)(x^2-6)+(x^3-2x^2)(2x)$

$f'(x)=3x^4-18x^2-4x^3+24x+2x^4-4x^3$

$f'(x)=5x^4-8x^3-18x^2+24x$

Ejemplo 08: Hallar la derivada en $f(x)=140$.

Solución

Aplicando la propiedad 1 tenemos: $f'(x)=0$, porque f es constante

ACTIVIDAD 01 DE REFORZAMIENTO

a) Determinar la derivada de las siguientes funciones aplicando límites.

a) $f(x)=5x^2$

b) $f(x)=x^2-3x+5$

c) $f(x)=\frac{2}{x^2}$

d) $f(x)=sen(x)$

b) Encontrar $f'(x)$

a) $f(x)=24-10x^2$

b) $f(x)=e^x-2x^5+4x^3$

c) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\ln(x)$

d) $f(x)=-\frac{10}{x^5}$

e) $f(x)=x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

f) $f(t)=t^4-2t^{-1}+\frac{3}{t^2}$

g) $f(x)=(x^3-2x)(x^5+6x^2)$

h) $f(x)=(\frac{x+3}{2})(x^2-4x+9)$

i) $f(x)=\frac{3x^5}{x^2-2x+1}$

j) $f(x)=\frac{1}{4x^5-3x^2+1}$

c) Encuentre ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en el punto dado, y Utilice una herramienta matemática para graficar f y f' (Videla, 2024).

a) $f(x)=x^4+2e^x$, $(0, 2)$

b) $f(x)=(1+2x)^2$, $(1, 9)$

c) $f(x)=3x^2-x^3$, $(1, 2)$

d) $f(x)=x-\sqrt{x}$, $(1, 0)$

d) La ecuación de movimiento de una partícula es $s(t)=t^3-3t$, donde s está en metros y t está en segundos. Encuentre

(a) **La grafica de movimiento de la partícula.**

(b) **La velocidad y aceleración como funciones de t (Videla, 2024),**

(c) **La aceleración después de 2 s, y**

(d) **La aceleración cuando la velocidad es 0 (Videla, 2024).**

e) Si en un cilindro se mantiene gas a una temperatura constante T, la presión P está relacionada con el volumen V mediante una fórmula de la forma $P=\dfrac{nRT3}{V-nb}-\dfrac{an^2}{V^2}$, en la que $a,\ b,\ n\ y\ R$ son constantes. Determine $\dfrac{dP}{dV}$

3.2. DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

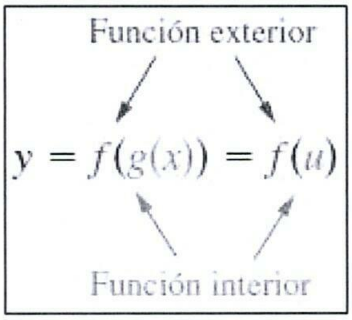
3.2.1. REGLA DE LA CADENA

Si $f(u)$ es derivable en $u=g(x)$ y $g(x)$ derivable en x, entonces la compuesta $(f\circ g)_{(x)}=f(g(x))$ es derivable en x. Además:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Usando la notación de Leibniz, si $y=f(u)$, $u=g(x)$

entonces: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$



REGLA DE LA CADENA PARA POTENCIAS

Si $u(x)$ es una función derivable entonces: $\boxed{\dfrac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}}$

A si mismo tenemos si: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}$, se cumple que:

1. Si $f(x)=e^{u(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{u(x)}u'(x)$
2. Si $f(x)=a^{u(x)}, a>0, a\neq 1\Rightarrow f'(x)=a^{u(x)}u'(x)\ln(a)$

Ejemplo 01: Sea $y=(3x^2-x+1)^4$ halle su derivada

solución

$$y'=4(3x^2-x+1)^3(6x-1)$$

Ejemplo 02: Sea $y=\sqrt{x^3+x}$ calcule $\dfrac{dy}{dx}$

Solución

$$y=\sqrt{x^3+x}=(x^3+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y=(x^3+x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^3+x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+1)=\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$$

Ejemplo 03: Sea $y=4^{x^3+e^x}$ calcule $\frac{dy}{dx}$

Solución

$$y=4^{x^3+e^x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=4^{x^3+e^x}\frac{dy}{dx}(x^3+e^x)\ln(4) \rightarrow y'=\ln(4)(3x^2+e^x)4^{x^3+e^x}$$

3.2.2. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

f) Derivada de la función seno de *x*

$$\frac{d}{dx}[sen(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h)-1)+sen(h)\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)\cos(x)}{h}=$$

$$sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=sen(x)(0)+\cos(x)(1)=\cos(x)$$

g) Derivada de la función coseno de *x*

$$\frac{d}{dx}[\cos(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-sen(h)sen(x)-\cos(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h)-1)-sen(h)sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h)-1}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)sen(x)}{h}=$$

$$\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=\cos(x)(0)-sen(x)(1)=-sen(x)$$

Para calcular las derivadas adicionales, no es necesario utilizar límites, ya que se pueden emplear las identidades trigonométricas relacionadas con el seno y el coseno.

h) Derivada de la función tangente de *x*

$$\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right]=\frac{\cos(x)\cos(x)-(-sen(x))sen(x)}{(\cos(x))^2}=\frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{(\cos(x))^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$$

El lector puede usar este mismo procedimiento para probar las siguientes derivadas:

$$\frac{d}{dx}\cot(x)=-\csc^2(x) \qquad \frac{d}{dx}\sec(x)=\sec(x)\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}\csc(x)=-\csc(x)\cot(x)$$

(Pinto, 2013)

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMPUESTAS

Si $u(x)$ *una funcion de* x entonces sus derivadas son:

1. Si $f(x)=sen(u(x)) \Rightarrow f'(x)=u'(x).\cos(u(x))$
2. Si $f(x)=\cos(u(x)) \Rightarrow f'(x)=-u'(x).sen(u(x))$
3. Si $f(x)=tg(u(x)) \Rightarrow f'(x)=u'(x).\sec^2(u(x))$
4. Si $f(x)=ctg(u(x)) \Rightarrow f'(x)=-u'(x).\csc^2(u(x))$
5. Si $f(x)=\sec(u(x)) \Rightarrow f'(x)=u'(x).\sec(u(x))tg(u(x))$
6. Si $f(x)=\csc(u(x)) \Rightarrow f'(x)=-u'(x).\csc(u(x))ctg(u(x))$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las fórmulas de derivación de las seis funciones trigonométricas inversas son:

1. Si $f(x)=arc\,\mathrm{Sen}\,u(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$
2. Si

$$f(x)=arc\,\mathrm{tg}\,u(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

3. Si

$$f(x)=arc\cos u(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$$

$$f(x)=arc\,\mathrm{ctg}\,u(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

4. Si

$$f(x)=arc\,\mathrm{ctg}\,u(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

5. Si

$$f(x)=arc\sec u(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

6. Si

$$f(x)=arc\csc u(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

Ejemplo 04: Calcular la derivada de $y=sen(x^2)$

Solución

$$y'=\cos(x^2)\,2x=2x\cos(x^2)$$

Ejemplo 05: Calcular la derivada de $y=arcsen(\ln x)$

Solución

$$y = arcsen(\ln x) \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$\rightarrow y' = \frac{x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

3.2.3. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $E(x,y)=0$, se calcula derivando término a término (Espinoza Ramos, 2022), considerando a $y=f(x)$ como función de x, y de esta despejamos $y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Una forma más practica para calcular $y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de la ecuación $E(x,y)=0$ es aplicado la formula

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}}$$

Ejemplo 06: Hallar la derivada de $y^2 = x$

Solución

Se define dos funciones implícitamente, ellas son: $y=f(x)=\sqrt{x}$. $y=f(x)=-\sqrt{x}$

Para hallar $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ debemos derivar implícitamente la ecuación $y^2 = x$, en primer lugar, vamos a sustituir y por $f(x)$ en la ecuación, así:

1.– $[f(x)]^2 = x$, ahora derivamos en ambos miembros con respecto a x, y usamos la regla de la cadena en el miembro izquierdo

2.– $f(x)f'(x)=1 \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2f(x)}=\frac{1}{2y}$

Entonces $y'=\frac{1}{2y}$

Ejemplo 07 $y^3+7y=x^3$ define a *y* como una función implícita de *x*, halle $\frac{dy}{dx}$

Solución

Derivando en ambos miembros:

$$3y^2.\frac{dy}{dx}+7\frac{dy}{dx}=3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(3y^2+7)=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{3y^2+7} \rightarrow y'=\frac{3x^2}{3y^2+7}$$

ACTIVIDAD 02 DE REFORZAMIENTO

i) Hallar las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $f(x)=(6x-2)\sqrt{x^2-5x+3}$

(b) $f(x)=\dfrac{e^{x^2+1}}{ln(x+1)}$

(c) $f(x)=\sqrt{(x-1)^5(6x-5)}$

(d) $f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{5x-1}\right)^2}$

(e) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\left(1-x^3\right)^5.x^3}{\left(9-2x^2\right)}}$

(f) $y=\sqrt[9]{\cot(8-3x)}$

(g) $y=\cot x^3 \sec 5x$

(h) $y=x^7\cot(4x-9)$

(i) $y=\cos^3 6x$

(j) $y=\tan^5 x^7$

(k) $f(x)=e^x.lnx$

(l) $f(x)=e^{2x}.lnx$

(m) $y=arc\cot\left(\dfrac{2}{5x^7-x}\right)$

(n) $y=arc\sec\left(5x^3-x\right)$

(o) $y=arc\,sen^7 2x$

(p) $y=arc\tan\left(3x^2-11x+5\right)$

j) Movimiento armónico. El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es (Pino, 2020): $y=\dfrac{1}{3}\cos 12t-\dfrac{1}{4}sen 12t$**, donde** y **se mide en pies y** t **en segundos.**

Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t=\dfrac{\pi}{8}$

k) Movimiento ondulatorio. Una boya experimenta un movimiento armónico simple, descrito por $y=A\cos(\omega t)$**, mientras las olas la atraviesan. La boya se desplaza verticalmente desde el punto más bajo hasta el más alto, recorriendo una distancia total de 1,067 m. Cada 10 segundos vuelve a su punto de máxima altura (Pino, 2020).**

a) Escribir una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t=0$**,**

b) Calcular la velocidad de la boya en función de t (Pino, 2020).

3.3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $y = f(x)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable en x entonces:

$\exists\ f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ entonces: $y'=f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ es la primera derivada o derivada de primer orden

Que al derivarse queda expresada como otra función de la forma siguiente.

$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ entonces: $y''=f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ que ha esta función le llamaremos segunda derivada o derivada de segundo orden y si volvemos a derivar se obtiene otra función.

$f'''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$ entonces: $y'''=f'''(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ y lo llamaremos tercera derivada o derivada tercer orden y así sucesivamente.

La derivada de la función $f^{(n)}(x)$ es $f^{(n)}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$ entonces: $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ es la enésima derivada o derivada de orden *n* (Pinto, 2013).

Ejemplo 01: Halle todas las derivadas de orden superior para (Pinto, 2013) $y=3x^4+2x^3+x^2-2$

Solución

Hallando sus derivadas de $y=3x^4+2x^3+x^2-2$

$$y'=12x^3+6x^2+2x$$
$$y''=36x^2+12x+2$$
$$y'''=72x+12$$
$$y^{iv}=72$$
$$y^{v}=0$$
$$\vdots$$
$$y^{n}=0$$

Ejemplo 02: Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

Solución

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x+1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Por lo tanto $f^{n}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$

Ejemplo 03: Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2-4}$

Solución

$$f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}\rightarrow f(x)=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

$$f'(x)=-2\frac{1}{(x-2)^2}-3\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=2\frac{1\cdot 2}{(x-2)^3}+3\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3}$$

$$f'''(x)=-2\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^4}-3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+2)^4}$$

$$f^{iv}(x)=2\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x-2)^5}+3\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+2)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x)=2\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x-2)^{n+1}}+3\frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(x+2)^{n+1}}$$

Por lo tanto $f^{n}(x)=2\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}+3\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$

Ejemplo 04: Demostrar que la función $y=Ax^n+Bx^{1-n}$, satisface la ecuación diferencial: $n(n-1)y-x^2y''=0$

Solución

$y = Ax^{n} + Bx^{1-n}$

Derivando

$y' = nAx^{n-1} + (1-n)Bx^{-n}$

$y'' = n(n-1)Ax^{n-2} + (1-n)(-n)Bx^{-n-1}$

$x^2 y'' = n(n-1)Ax^{n} + (n-1)(n)Bx^{1-n} \; ....(1)$

$n(n-1)y = n(n-1)Ax^{n} + n(n-1)Bx^{1-n} \; .....(2)$

Restando (1)-(2)

Se obtiene: $n(n-1)y - x^2 y'' = 0$

3.4. DERIVADAS DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

3.4.1. REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN FORMA PARAMÉTRICAS

Las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva pueden ser funciones de una variable t llamado parámetro, es decir (Espinoza Ramos, 2022):

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \cdots (\alpha)$$

, son las ecuaciones paramétricas.

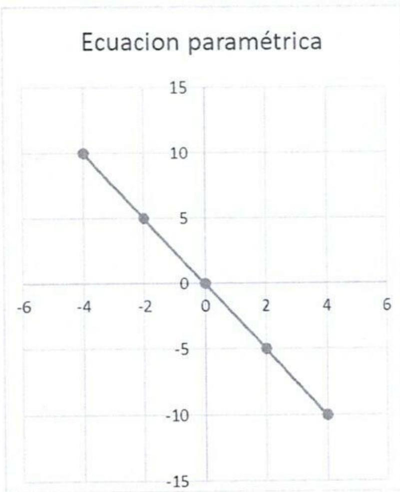
A la ecuación (α) se le denomina ecuación paramétrica donde el valor de t le corresponde un punto (Espinoza Ramos, 2022) $P(f(t), g(t))$ del plano XY.

Ejemplo 05: Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

a) $x = 2t, \quad y = -5t$

solución

t	x	y
-2	-4	10
-1	-2	5
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10

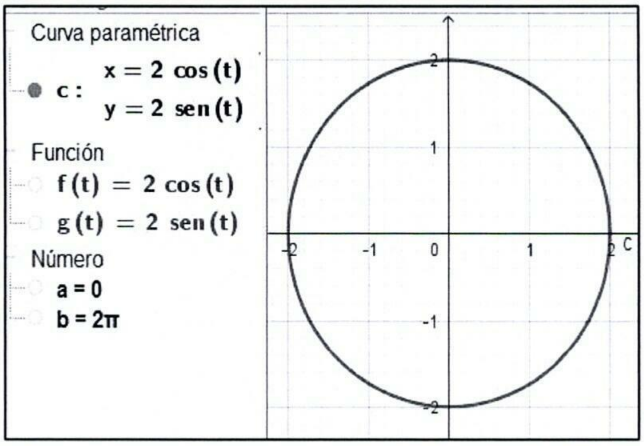


b) $x = 2\cos\theta, \quad y = 2sen\theta$

t	x	y
0	2	0

$\pi/4$	1.41	1.41
$\pi/2$	0	2
$3\pi/4$	-1.41	1.41
π	-2	0
$3\pi/2$	0	-2
2π	2	0

Solución



3.4.2. DERIVADAS DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Consideremos dos funciones f y g derivables en un intervalo $[a, b]$, tal que:

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, son las ecuaciones paramétricas (Espinoza, 2024).

La $\dfrac{dy}{dx}$ donde x y y están dados en forma paramétrica, se obtiene aplicando la regla de la cadena, es decir (Espinoza, 2024):

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = g'(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \quad f'(t) \neq 0$$

Si

Donde: $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \qquad f'(t) \neq 0$$

Para obtener la segunda derivada, se aplica nuevamente la regla de la cadena, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}; \qquad f'(t) \neq 0$$

Ejemplo 03: Calcular $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\pi/2}$ en $\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\,sent}{a(1-\cos t)} = \frac{sent}{1-\cos t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\pi/2} = \frac{sen(\pi/2)}{1-\cos(\pi/2)} = \frac{1}{1-0} = 1$$

De modo que $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\pi/2} = 1$

ACTIVIDAD 03 DE REFORZAMIENTO

l) Hallar las derivadas y evalúe en de $f^n(x)$ las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(x + a)$

b) $f(x) = \ln(x)$

c) $f(x) = e^{ax}$

d) $f(x) = sen(x)$

e) $f(x) = (ax + b)^n$

f) $f(x) = x e^x$

g) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

i) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2+x-12}$

m) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, en el punto cuya coordenada es y=3.

n) Si $f(x) = a\,sen 3x - b\cos 3x$,. Hallar los valores de a y b tal que se cumple la igualdad: $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 10\cos 3x$

o) Trazar las la gráfica de las ecuaciones paramétricas pasando a coordenadas cartesianas y Utilice una herramienta matemática para su gráfico.

a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = 2+2sen\,\theta \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,sen^3 t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = t^2-1 \\ y = 4t-t^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = \dfrac{a\,t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{a\,t^2}{1+t^3} \end{cases}$

p) Utilice una herramienta matemática para trazar la gráfica de las funciones en forma paramétrica y calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

a) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t\,sent) \\ y = a\,(sent - t\cos t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a\,(t - sent) \\ y = a\,(1 - t\cos t) \end{cases} \Rightarrow para\ t = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,sen^3 t \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow para\ t = 0$

q) Encontrar las ecuaciones de la tangente y normal de la curva $x = t^2 + 1$**,** $y = t^3 + 2t$**, para** $t = -2$

r) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}$; $y = -\frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$ **en el punto** $(2,2)$ **(Espinoza Ramos, 2022).**

s) Hallar la n- ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{6}{(x-3)^2(x+1)}$

t) Refrigeración. La temperatura T **en grados Fahrenheit de los alimentos colocados en un congelador es (Larson & Bruce H. Edwards, Cálculo de una variable, 2010)**

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

Donde t es el tiempo en horas. Calcular la razón de cambio de T en Celsius con respecto a t en cada uno de los siguientes tiempos (Larson & Bruce H. Edwards, Cálculo de una variable, 2010):

$a)\ t = 1$, $b)\ t = 3$, $c)\ t = 5$ y $d)\ t = 10$

3.5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Las aplicaciones de la derivada de una función son numerosas. En este apartado nos limitaremos a ver las siguientes (Limites y Continuidad, 2024):

Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos, estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos, estudio de la curvatura de una curva y puntos de inflexión, resolución de problemas de optimización, regla de L´hôpital, para el cálculo de límites, teoremas de Rolle, teorema del valor medio y sus aplicaciones y velocidad y aceleración en un movimiento rectilíneo (Limites y Continuidad, 2024).

3.5.1. OBTENCIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

La ecuación de una recta que tiene de pendiente m y pasa por el punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ es $y = y_0 + m(x - x_0)$

La recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ tiene por pendiente en ese punto, según sabemos, $m = f'(x_0)$ y por tanto su ecuación es (Limites y Continuidad, 2024):

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo 01: Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas (Limites y Continuidad, 2024).

Solución.

Hallando Los puntos de corte de la función $f(x) = 4 - x^2$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son:

$Q(2.0) \quad P(-2.0)$

Calculando la derivada de la función

$f'(x) = -2x$. Sabemos que (Limites y Continuidad, 2024).

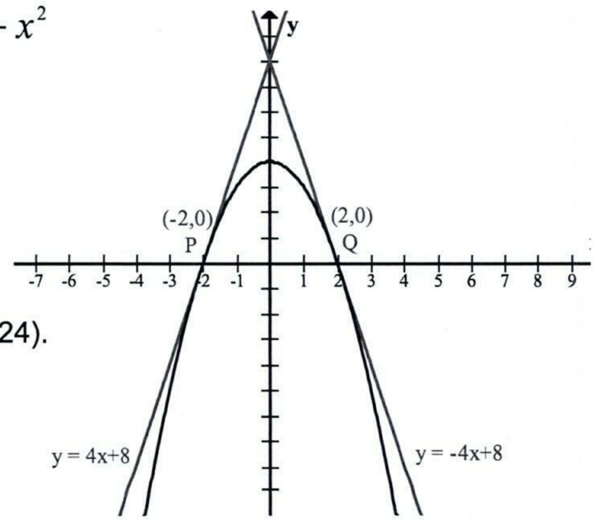
La pendiente de la recta tangente en esos puntos es

$m_1 = f'(2) = -4$ y $m_2 = f'(-2) = 4$

Las rectas tangentes en los puntos.

$Q(2,0)$ y $P(-2,0)$ son, por tanto (Márquez, 2014):

$$y = 0 - 4(x - 2) = -4x + 8 \; ; \; y = 0 + 4(x - (-2)) = 4x + 8$$



3.5.2. ESTUDIO DE LA MONOTONÍA DE UNA CURVA Y OBTENCIÓN DE SUS EXTREMOS.

a) Crecimiento y Decrecimiento de una función en un punto (Márquez, 2014).

$f(x)$ derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Criterio que nos permite relacionar la monotonía de una función en un punto con el signo que toma su derivada en dicho punto (Márquez, 2014).

$$\text{Sea } f(x) \text{ una función derivable en } x_0 \rightarrow \begin{cases} f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x_0 \end{cases}$$

b) Máximos y mínimos relativos de una función.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\ tiene\ en\ x_0 \\ un\ Máximo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ a\ tal\ que \\ si\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\ tiene\ en\ x_0 \\ un\ Mínimo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ a\ tal\ que \\ si\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{array}\right\}$$

Condición necesaria de extremo relativo.

$$Si\ f(x)\ tiene\ máximo\ o\ mínimo\ relativo\ en\ \ x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(**esta condición es necesaria pero no suficiente). Definimos puntos singulares o puntos críticos de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula: $f'(x) = 0$ (tangente horizontal) (Márquez, 2014).

Los puntos críticos pueden ser: máximos, mínimos o puntos de inflexión (Márquez, 2014). La regla para identificar los extremos relativos de una función se basa en observar el signo de su primera derivada cerca de un punto específico (Márquez, 2014). Un punto crítico es:

$$\begin{array}{lll} Máximo & f' > 0\ a\ su\ izquierda & f' < 0\ a\ su\ derecha \\ mínimo & f' < 0\ a\ su\ izquierda & f' > 0\ a\ su\ derecha \\ Inflexión & \multicolumn{2}{l}{f'\ tiene\ el\ mismo\ signo\ a\ ambos\ lados\ del\ punto} \end{array}$$

Ejemplo 02: Sea la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos y mínimos (Márquez, 2014).

Solución.

Determinando los puntos críticos.

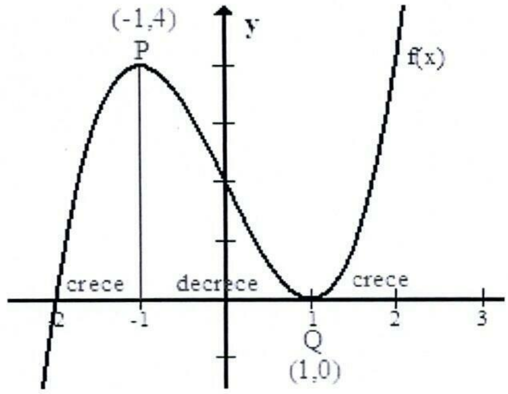
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

Estudiamos pues el signo de la derivada

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{array}{lll} en & (-\infty, -1) & f' > 0 \Rightarrow f\ creciente \\ en & (-1, 1) & f' < 0 \Rightarrow f\ decreciente \\ en & (1, \infty) & f' > 0 \Rightarrow f\ creciente \end{array}$$

Como la función en $x = -1$ pasa de creciente a decreciente, $f(x)$ tiene en $x = -1$ un Máximo relativo que vale: $(f(-1) = 4)$ (library, 2020).



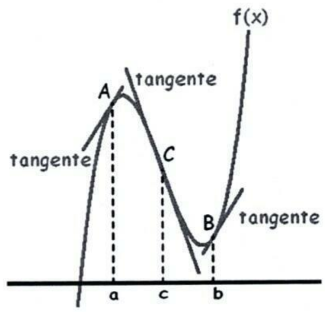
Como la función en $x = 1$ pasa de decreciente a creciente, $f(x)$ tiene en $x = 1$ un Mínimo relativo que vale: $(f(1) = 0)$ (library, 2020).

3.5.3. ESTUDIO DE LA CURVATURA Y LA OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN.

a) Concepto de curvatura de una curva en un punto.

Observa el gráfico de la curva $y = f(x)$ (Márquez, 2014).

Dada la recta tangente a la curva en el punto P, de ecuación: $y = t(x)$, puede ocurrir (Márquez, 2014):



- **Si en las proximidades de P es $t(x) < f(x)$ la curva es <u>cóncava</u> en P (en $P = B$)**
- **Si en las proximidades de P es $t(x) > f(x)$ la curva es <u>convexa</u> en P (en $P = A$) (Márquez, 2014).**

Si la tangente en P atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P se cumple: $t(x) > f(x)$ y a la derecha de P se cumple (Espinoza, 2024) $t(x) < f(x)$ (Márquez, 2014) (o viceversa) se dice que la curva $y = f(x)$ tiene en P un punto de Inflexión (en ejemplo $P = C$) (Márquez, 2014).

b) RELACIÓN DE LA CURVATURA CON EL VALOR DE LA SEGUNDA DERIVADA.

$$\begin{aligned}
&\textit{Si } f \textit{ tiene derivada segunda en } x_0\\
&f \textit{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f' \textit{ es creciente en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0\\
&f \textit{ convexa en } x_0 \Rightarrow f' \textit{ es decreciente en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0\\
&f \textit{ tiene un punto de Inflexión en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0
\end{aligned}$$

c) CRITERIO PARA DETERMINAR LA CURVATURA DE UNA CURVA.

$$f \text{ y } f' \text{ derivables en } x_0$$
$$Si \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0$$
$$Si \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x_0$$
$$Si \quad \left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } x_0 \text{ Inflexión}$$

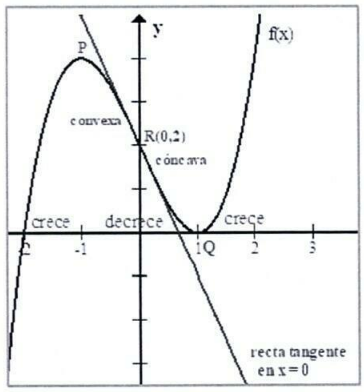
d) CRITERIO BASADO EN EL SIGNO DE LA DERIVADA SEGUNDA:

Para determinar los puntos extremos de la función (Limites y Continuidad, 2024).

$$Si\, f'(x_0) = 0 \text{ y existe} f''(x_0)$$
$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tieneun mínimoen } x_0$$
$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tieneunmáximoen } x_0$$

Ejemplo 03: Estudia la curvatura de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y puntos de inflexión (Márquez, 2014).

Solución



Hallando su derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Su segunda derivada es: $f''(x) = 6x$

Resolvemos los valores que anulan la derivada segunda, es decir, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$ (Limites y Continuidad, 2024).

$$en \quad (-\infty, 0) \rightarrow f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ convexa}$$
$$en \quad (0, +\infty) \rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ concava}$$

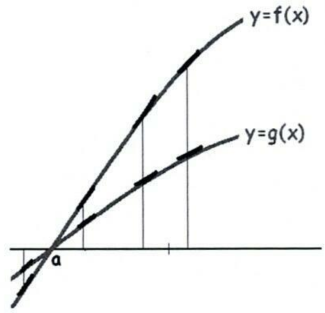
En consecuencia, en el punto de abscisa $x = 0$,(punto de inflexión $R\ (0,\ 2)$ (Márquez, 2014).

Vemos también en la gráfica como la recta tangente a la curva en el punto $R(0,2)$ atraviesa a la curva (Limites y Continuidad, 2024).

Ejemplo 04: Dada la función $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos y mínimos; analice su concavidad y punto de inflexión (Limites y Continuidad, 2024).

3.5.4. REGLA DE L´HÔPITAL, PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES.

Mira el gráfico del lado izquierdo.



- **Si existe** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ **; significa que la relación entre las ordenadas de** $y=f(x)$ **y las de** $y=g(x)$ **tiende a estabilizarse (Limites y Continuidad, 2024).**
- **Si existe el** $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **significa que tiende a estabilizarse la relación entre sus pendientes (Limites y Continuidad, 2024).**
- **Si f y g son funciones derivables en un entorno** $(a-r,a+r)$ **de** a **(Márquez, 2014).**

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ y el límite $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ entonces también

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l}$$

Este procedimiento para calcular un límite de la forma (0/0) mediante el límite del cociente de sus derivadas se conoce como la regla de L'Hôpital. En ocasiones, después del primer paso, puede surgir otra indeterminación similar, lo que permite repetir el proceso.

Ejemplo 05.- Resuelve el siguiente límite $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

Solución

Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y cumple las condiciones de la regla d L`hôpital (Limites y Continuidad, 2024).

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+2x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{6x+4}{6x+2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 06: Resuelve el siguiente límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

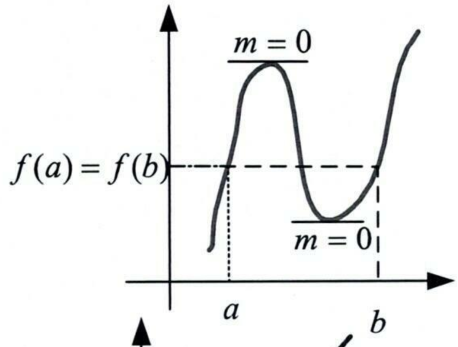
Ampliación de la regla de L´hôpital

Los límites del tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los que a es un número o $\pm\infty$

3.5.5. TEOREMA DE ROLLE, TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y APLICACIONES.

a) Teorema 2: (Teorema de Rolle)

Sea $f \in C[a,b]$ y es diferenciable en $<a,b>$. Si $f(a)=f(b)$, entonces existe un número $c \in <a,b>$ *Tal que* $f'(c)=0$



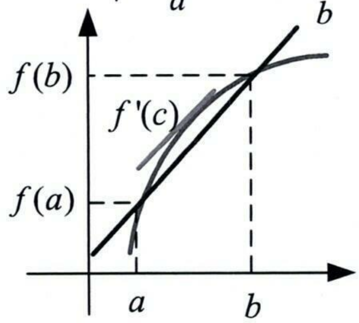
b) Teorema 3: (Teorema del Valor Medio)

Sea $f \in C[a,b]$ y es diferenciable en $<a,b>$

.

Entonces $\exists c \in <a,b>$ *Tal que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Ejemplo 07: Hallar la raíz real de $3x^3+2x-4=0$, en un intervalo de longitud menor $<0,\ 4>$, demuestre que existe una raíz única; $y=3x^3+2x-4$

Solución.

Primero: Hallando la raíz real.

$$\left.\begin{aligned} Para: x=0 &\rightarrow f(0)=-4 \\ x=1 &\rightarrow f(1)=1 \end{aligned}\right\} me\, basta\, tomar <0,1>$$

Analizaremos en el intervalo [0, 1], $f \in C[0,1]$ y es diferenciable en $<0,1>$. Entonces

$\exists c \in <0,1>$ *Tal que*

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$ .... Por T.V.M

$$9c^2+2=\frac{1-(-4)}{1-0}$$

$$9c^2=3 \rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow c=0,58 \quad \textit{Se escoge la positiva}$$

Segundo: Demostración por el absurdo

Sea $c_1<c_2, \exists c_1, c_2 \in <0,1>$ *tal que* $f(c_1)=f(c_2)=0$ ..... por el **teorema de Rolle**

Siempre que $f'(c)=0$, entonces $f'(c)=9c^2+2=0$

Siempre que:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \geq 0, \forall x \in R \\ Si\ p \rightarrow q \cong Si \sim q \rightarrow \sim p \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \geq 0 \\ \dfrac{9c^2 \geq 0}{2+9c^2 \geq 0} \end{array}$$

Por lo tanto $\exists c' \in <0.8, 0.99>\ tal\ que\ \ c' \in [0,1]$

3.5.6. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

Definición: Si $s = s(t)$ es la ecuación de la posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración del objeto en el instante t está dado por (Espinoza Ramos, 2022):

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ejemplo 08: Un globo está dado siendo inflado en tal forma que su volumen aumenta a razón de $5\ m^2 / \min$ ¿A qué rapidez aumentan el diámetro cuando éste tiene 12m? (Espinoza Ramos, 2022).

Solución

El globo esférico, Su volumen esta dado por: (V: Volumen del globo esférico)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$D = 12\ m \rightarrow D = 2r \rightarrow r = 6$$

$$\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dt} = 5\ m^3 / \min$$

Como $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$

A hora reemplazando sus valores se tiene: $5 = 4\pi(6)^2 \dfrac{dr}{dt} \rightarrow \dfrac{dr}{dt} = 0.011 m / \min$

(Limites y Continuidad, 2024).

Por lo tanto: $\dfrac{dD}{dt} = 2(0.011) m / \min = 0.022 m / \min$

3.5.7. RAPIDEZ DE CAMBIO

u) VELOCIDAD Y ACELERACIÓN INSTANTANEA

Sea $f(t)$ una función que describe el movimiento, llamada función posición del objeto y un intervalo de $t = a$, $t = b$, con $a < b$ (Espinoza Ramos, 2022), donde f camba de posición de $f(b) - f(a)$, la velocidad promedio o velocidad media ($\overline{V}$) está dada por:

$$\boxed{\overline{V} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

h: Es la longitud del intervalo $[a, b]$: $b-a=h$.

Se denomina, velocidad de una partícula en el instante t o velocidad instantánea en t, a:

$$\boxed{v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}}$$

Es decir, $v(t)$ es la derivada de f en t, $v(t)=f'(t)=\frac{df}{dt}$

Asumiendo que velocidad es una función $v=v(t)$, entonces la aceleración en el instante t está dada como la derivada de la función $v(t)$, es decir:

$$\boxed{a(t)=\frac{d(v(t))}{dt}=\frac{d^2(f(t))}{dt^2}}$$

v) RAZONES DE CAMBIO

Dada $y=f(x)$ si x cambia de x_1 a x_2 entonces el cambio en x se llama incremento de x: $\boxed{\Delta x=x_2-x_1}$

El correspondiente incremento de *y* es $\boxed{\Delta y=f(x_2)-f(x_1)}$ (Pinto, 2013)

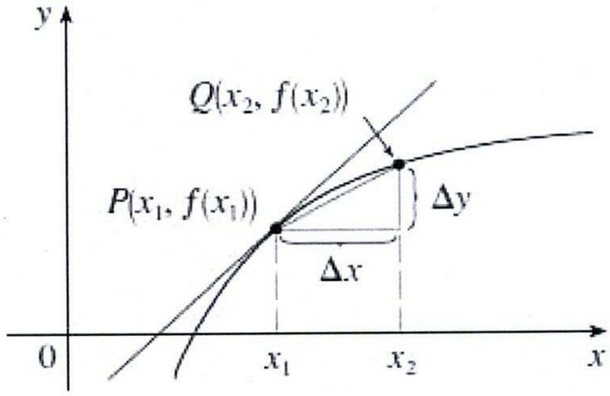
El cociente de estos incrementos se llama ***Razón de cambio promedio*** de *y* con respecto a *x* (Pinto, 2013).

$$\textit{Razón de cambio promedio}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

La razón de cambio instantánea de y con respecto a x en el punto $(x_1, f(x_1)$ es (Pinto, 2013).:

$$\textit{Razón de cambio instantáneo}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

El promedio de rapidez de cambio puede ser interpretado como la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$



Usando notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

EN LA FÍSICA

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, entonces $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa el promedio de velocidad en un periodo Δt y $v = \frac{ds}{dt}$, representa la velocidad instantánea (Roman, 2020).

La rapidez instantánea de cambio de velocidad con respecto al tiempo es la aceleración:

$a(t) = v'(t) = s''(t)$ (Roman, 2020).

3.6. APLICACIONES DE LA DERIVADA EN LA INGENIERÍA

Ejemplo 01: ***Análisis del movimiento de una partícula***. La posición de una partícula está dada por la ecuación $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ Donde *t* se mide en segundos y *s* en metros (Márquez, 2014).

a) **Determine la velocidad en el instante t**
b) **¿Cuál es la velocidad después de 2 segundos? ¿Y después de 4 segundos?,**
c) **¿En qué momentos está la partícula en reposo?,**
d) **¿En qué momentos está la partícula moviéndose hacia adelante (es decir, en la dirección positiva) ?,**
e) **Dibuje un diagrama que ilustre el movimiento de la partícula,**
f) **Calcule la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos,**
g) **Encuentre la aceleración en el tiempo *t* y después de 4 *s* (Videla, 2024).**
h) **Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para, $0 \le t \le 5$ (Márquez, 2014).**

Solución

a) **La solución velocidad es la derivada de la función de posición.**

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t - 9$$

b) **La velocidad después de $2s$ significa la velocidad instantánea cuando $t = 2s$, es decir (Videla, 2024),** $v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2^2) - 12(2) + 9 = -3\,m/s$

c) **La velocidad después de $4s$:**

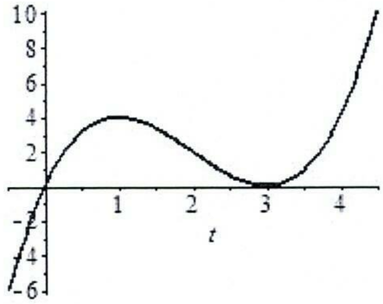
$$v(4) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3(4^2) - 12(4) + 9 = 9\,m/s$$

La partícula está en reposo cuando $v(t)=0$, o sea,

$$v(t)=3(t^2)-12(t)+9=3(t-3)(t-1)$$

$$\Rightarrow t=3;\ t=1$$

La partícula está en reposo después de 1 y 3 segundos.



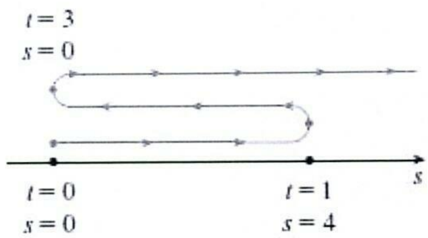
d) La partícula se mueve en la dirección positiva cuando $v(t)>0$, esto es (Videla, 2024),

$$v(t)=3(t^2)-12(t)+9=3(t-3)(t-1)>0$$

Los factores son positivos cuando $t>3$ o cuando ambos factores son negativos $t<1$. Se mueven hacia atrás (en dirección negativa) cuando $1<t<3$ (Márquez, 2014).

e) Usando la información del inciso

Figura movimiento de la partícula, en una dirección y otra a lo largo de la recta (el eje s) (Videla, 2024).



f) Necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos [0, 1], [1, 3] y [3, 5] separadamente (Videla, 2024).

Para: [0, 1] , tenemos que: $|f(1)-f(0)|=|4-0|=4m$

Para: [1, 3] , tenemos que: $|f(3)-f(1)|=|0-4|=4m$

Para: [3, 5], tenemos que: $|f(5)-f(3)|=|20-0|=20m$

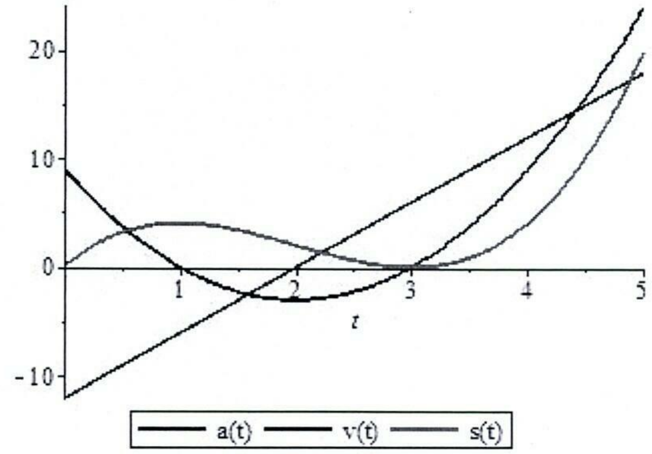
La distancia total es 4+ 4+ 20 = 28*m*

g) La aceleración es la derivada de la función de velocidad:

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=6t-12$$

$$a(t)=6(4)-12=12m/s^2$$

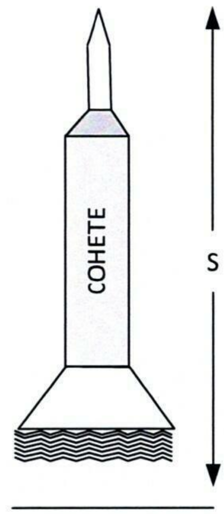
h) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para, $0\leq t\leq 5$



Ejemplo 02: Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a S sobre el suelo, t seg. Después de ser encendido. Donde $S=560t-16t^2$ y la dirección positiva hacia arriba (Roman, 2020). Encontrar:

a) **La velocidad del cohete 2seg. Después de haber sido encendido,**

b) **Cuánto tardará en alcanzar la altura máxima (m) (Roman, 2020).**



Solución

La ecuación $S=560t-16t^2$ representa el movimiento

La velocidad del cohete, t seg. Después de haber sido encendido será:

$v(t)=S'(t)$ (Espinoza Ramos, 2022),

Como $S(t)=560t-16t^2 \Rightarrow S'(t)=560-32t$

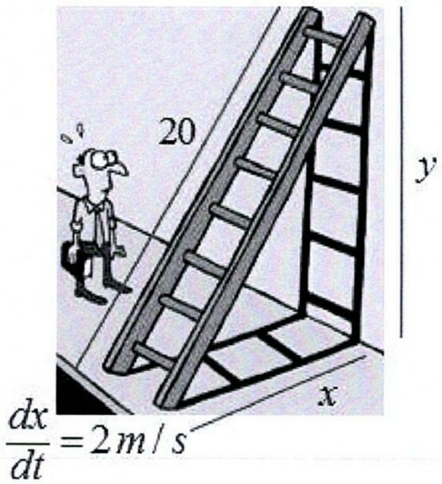
Por tanto $v(t)=560-32t$

a) $v(2)=560-64=496m/s$

b) **Como $v(t)=0$, es para que alcance su altura máxima crece.**

$0=560-16t \rightarrow t=17.5s$ (Espinoza Ramos, 2022).

Ejemplo 03:***(Rapidez de variación relacionadas):*** Una escalera de 20 m de largo, su base se desliza a razón de $2m/s$. Como se muestra en la **figura** ¿Con que rapidez resbala el otro extremo cuando está a 12m del suelo?



Solución

Establecemos una relación entre y x y

$$x^2+y^2=400$$

Derivando con respecto t

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt}=-\frac{dy}{dt}\rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

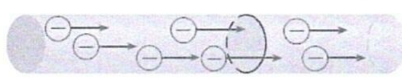
Como $y=12$ entonces $x^2+12^2=400\rightarrow x=16$

Reemplazando: $\frac{dy}{dt}=-\frac{16}{12}(2m/s)\rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{8}{3}m/s$

Observación:

Una corriente eléctrica es la derivada de la carga. Siempre que hay movimiento de cargas eléctricas, se genera una corriente. En la figura, se muestra una sección de un alambre con electrones moviéndose sobre una superficie plana sombreada en rojo.. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces el promedio de corriente durante este intervalo está definido como (Videla, 2024).

Promedio de corriente = $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q_2-Q_1}{t_2-t_1}$

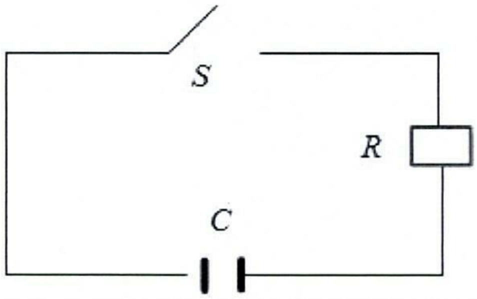


Si tomamos el límite de este promedio de corriente en intervalos cada vez más cortos, obtenemos lo que se llama corriente I en un tiempo determinado t_i (Videla, 2024).

$$I=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}$$

Entonces la corriente es la rapidez a la que fluye carga por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (Coulombs por segundo, llamados Amperes) (Videla, 2024).

Ejemplo 04: Considere el circuito mostrado en la figura, en el cual hay un condensador con una capacidad determinada que está cargado $C(Faradios)$ y tensión inicial de $V(Voltios)$ entre sus placas, se descarga sobre una resistencia $R(\Omega)$. Al cerrar la llave S comienza a circular una corriente de intensidad I dada por la expresión (Limites y Continuidad, 2024).



$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = RC\ cte\ de\ tiempo$, calcula la rapidez de variación de I en $t=0\ y\ t=\tau$ (Limites y Continuidad, 2024).

Solución

Dado $I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, se deduce que la rapidez está dada por: $\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Para $t=0$, tenemos que: $\frac{dI(0)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}\ (A/s)$

Para $t=\tau$, tenemos que: $\frac{dI(\tau)}{dt}=-\frac{1}{\tau}\frac{V}{R}e^{-1}\ (A/s)$

Ejemplo 05

Suponga que un incendio forestal se expande en forma de círculo, y el radio de este círculo cambia a razón de 1.8 m/min. ¿Cuál es la tasa de crecimiento del área de la región afectada cuando el radio llega a los 50m?

Solución

Derivamos el área del círculo con respecto al tiempo para hallar la razón en la que está creciendo y propagándose el incendio.

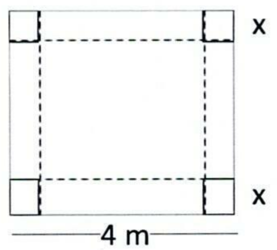
$$A=\pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{d}{dt}[\pi r^2]$$
$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt}=2\pi(50m)(1.8m/\min)$$
$$\frac{dA}{dt}=565.5m/\min$$

Por lo tanto, el área de propagación de la región incendiada con un radio de alcance $50\,m$ es de $565.5m/\min$.

Ejemplo 06

Se tiene una lámina de madera cuadrada de $4\,m$ de lado, si cortamos cuadrados iguales en las esquinas con el fin de construir una caja abierta para hacer un germinador de especies forestales, hallar las dimensiones de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo. Desprecie el espesor de la lámina.

Solución



$V = Base\,x\,Altura$

$V = (4-2x)(4-2x)\,x$

$V = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

Primero: Hallamos los puntos críticos con la primera derivada

$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

$V'(x) = 12x^2 - 32x + 16$

Haciendo $V'(x) = 0$

$V'(x) = 12x^2 - 32x + 16 = 0$

$x = 2; \quad x = \dfrac{2}{3}$

Para que el volumen sea máximo asumimos $x = 2/3$

Segundo: Identificamos los intervalos

$\left\langle -\infty, \dfrac{2}{3} \right\rangle \left\langle \dfrac{2}{3}, 2 \right\rangle \langle 2, \infty \rangle$

Tomamos un número que esté dentro de los intervalos y reemplazamos en $V'(x)$

$0 \in \left\langle -\infty, \dfrac{2}{3} \right\rangle \rightarrow V'(0) = 16 \quad > 0 \uparrow$

$1 \in \left\langle \dfrac{2}{3}, 2 \right\rangle \rightarrow V'(1) = -4 \quad < 0 \downarrow \quad \begin{cases} Máx \\ mín \end{cases}$

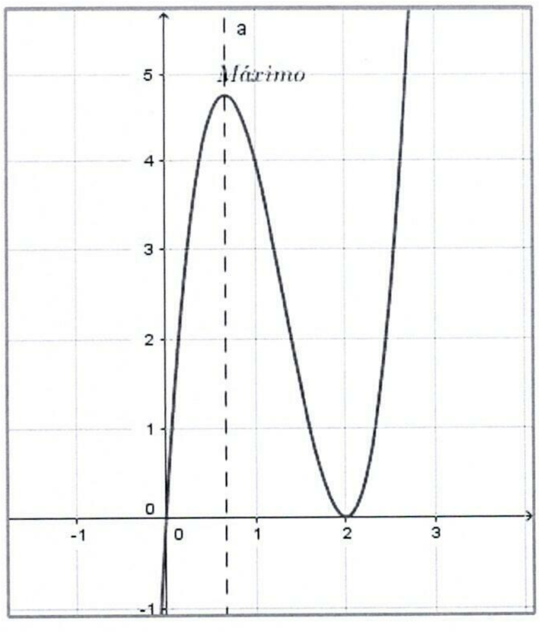
$3 \in \langle 2, \infty \rangle \rightarrow V'(3) = 28 \quad > 0 \uparrow$

Reemplazamos los puntos críticos en la función $V(x)$

$V(2/3) = 4.74$

$V(2) = 4(2)^3 - 16(2)^2 + 16(2) = 0$

Tercero: Grafica en si



Ejemplo 07

Un vivero forestal cuenta actualmente con 24 árboles de nogal (Juglans regia), y cada uno de estos árboles produce 600 frutos. Se estima que por cada árbol adicional que se plante, la producción de frutos por árbol disminuye en 15. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto semillero para que la producción sea máxima? ¿Cuál será la producción? (library, 2020).

Solución

Numero de árboles: 24

Número de frutos por árbol es: 600

Producción total actual de semillas es: $24(600) = 14400$

Sembrando árboles adicionales

Número de árboles: $24 + x$

Número de frutos por árbol: $600 - 15x$

Producción total de semillas es: $p(x) = (24 + x)(600 - 15x)$

$p(x) = 14400 + 240x - 15x^2$: modelo que representa la producción de semillas por cada árbol sembrado.

Determinamos los puntos críticos

$$p'(x) = -30x + 240 = 0$$
$$-30x + 240 = 0$$
$$30x = 240$$
$$x = 8$$

Determinando los intervalos donde la función es creciente o decreciente

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in \langle -\infty, 8\rangle \rightarrow p'(0) = 240 > 0 \uparrow \\ 10 \in \langle 8, \infty\rangle \rightarrow p'(10) = -60 < 0 \downarrow \end{array}\right\} Máximo$$

Para el sembrado de 8 árboles se tiene una producción máxima de 15360 semillas

ACTIVIDAD 04 DE REFORZAMIENTO

i) Determinar máximos y mínimos, puntos críticos, Analizar si es creciente o decreciente, puntos de inflexión (si fuera el caso) y Graficar en si en (Roman, 2020):

a) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 2$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $h(x) = sen^4 x - \cos^2 x$

f) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{4}{3}\, x\sqrt{3 - x}$

j) **Si $f(x)=ax^3+bx^2$, determinar a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1, 2) (Espinoza Ramos, 2022).**

k) **Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ una función. Hallar los valores de a, b, c, d tal que f tenga un punto de inflexión en $P\left(-\frac{1}{2},\frac{49}{12}\right)$, y sea tangente a la recta $y=3-2x$ en el punto $Q(0,3)$ (Roman, 2020).**

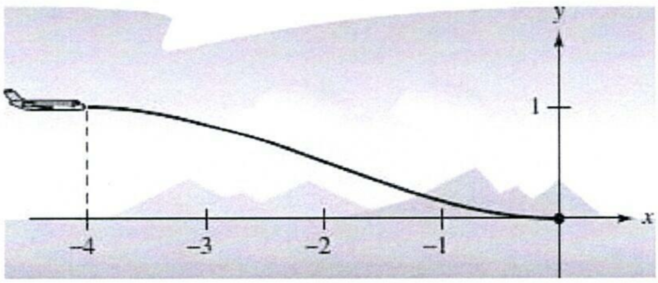
l) **Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a $s(t)$ sobre el suelo, t seg, después de ser encendido (Espinoza Ramos, 2022). Donde $s(t)=576t-16t^2$ y la dirección positiva hacia arriba. Encontrar:**

a) **La velocidad del cohete en $x=t^2+1$, después de haber sido encendido.**

b) **Cuánto tardará en alcanzar la altura máxima.**

m) **Potencia La fórmula para la salida de potencia P de una batería es $P=VI-RI^2$, donde V es la fuerza electromotriz en volts. R es la resistencia e I es la corriente. Determinar la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de P en una batería para la cual $V=12$ volts y $R=0.5$ ohms. Suponer que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo $0\le I\le 15$. ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explicar.**

n) **Trayectoria de planeo de un avión: Un pequeño avión empieza su descenso desde la altura de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (Larson & Edwards, Cálculo de una Variable, 2010)**



a) **Encontrar la función cúbica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ en el intervalo $[-4,\ 0]$ que describe una trayectoria de planeo uniforme para aterrizaje.**

b) **La función del apartado a) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida? (Pino, 2020)**