

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
JAÉN**

**COMISIÓN ORGANIZADORA**



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE JAÉN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ALGEBRA LINEAL**

**SEPARATA MATRICES Y  
DETERMINANTES**

**Autores:**

**Mg. Damián Sandoval Juan Carlos**

**Mg. Damián Sandoval Leonardo**

**Mg. Fuentes Maza Frans**

**Jaén, octubre del 2024**



## CONTENIDO

<b>PRESENTACIÓN</b> .....	<b>3</b>
<b>1. MATRICES Y DETERMINANTES</b> .....	<b>4</b>
<b>1.1. CUERPO</b> .....	<b>4</b>
<b>1.2. MATRIZ</b> .....	<b>4</b>
<b>1.3. CLASES DE MATRICES</b> .....	<b>5</b>
<i>1.3.1. Matrices Rectangulares</i> .....	5
<i>1.3.2. Matrices cuadradas</i> .....	5
<i>1.3.3. Matriz Diagonal:</i> .....	5
<i>1.3.4. Matriz Escalar:</i> .....	5
<i>1.3.5. Matriz identidad:</i> .....	6
<i>1.3.6. Matriz triangular superior:</i> .....	6
<i>1.3.7. Matriz triangular inferior:</i> .....	6
<i>1.3.8. Transpuesta de una matriz:</i> .....	6
<i>1.3.9. Matriz simétrica:</i> .....	7
<i>1.3.10. Matriz antisimétrica:</i> .....	7
<i>1.3.11. Matriz ortogonal:</i> .....	7
<i>1.3.12. Matriz Involutiva:</i> .....	7
<i>1.3.13. Matriz Idempotente:</i> .....	7
<i>1.3.14. Matriz Hermítica:</i> .....	7
<b>1.4. OPERACIONES CON MATRICES</b> .....	<b>7</b>
<b>1.5. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES</b> .....	<b>8</b>
<b>1.6. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>10</b>
<b>1.7. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES ENTRE FILAS DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>12</b>
<b>1.8. RANGO DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>14</b>
<b>1.9. EQUIVALENCIA DE MATRICES:</b> .....	<b>14</b>
<b>1.10. INVERSA DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>15</b>
<b>1.11. EXISTENCIA DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>15</b>
<b>1.12. MÉTODOS PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ</b> .....	<b>15</b>
<b>1.13. EJERCICIOS DE APLICACIÓN</b> .....	<b>16</b>
<b>REFERENCIA BIBLIOGRAFÍAS</b> .....	<b>20</b>



## PRESENTACIÓN

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que ayudan a organizar y gestionar datos. Se utiliza en diversas disciplinas de las ciencias para clasificar valores numéricos según dos criterios o variables, formando matrices de información que recogen datos relevantes del problema. También existen matrices de relación, que indican si ciertos elementos están vinculados. Las matrices son importantes para desarrollar el cálculo numérico, solución de sistemas de ecuaciones lineales, diferenciales y derivadas parciales, además de tener múltiples aplicaciones en física.

Esta separata presenta una selección de problemas de matrices y determinantes que sirven de apoyo a los estudiantes que llevan los cursos de álgebra lineal, métodos numéricos y programación de ingeniería existentes en las carreras de Ingenierías de nuestra universidad. Esperamos que esta separata ayude al alumno en el aprendizaje de un tema muy importante en Álgebra Lineal.

Los autores.



## 1. MATRICES Y DETERMINANTES

Definiremos un objeto, una matriz, que nos permite resolver problemas prácticos organizando los datos en bloques numéricos, podemos realizar operaciones aritméticas de manera ordenada y eficiente, facilitando la solución de los problemas asociados, un determinante es un valor escalar que se asocia a una matriz cuadrada y que proporciona información sobre propiedades de la matriz, como si es invertible y el volumen de la transformación que representa

### 1.1. Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto  $\mathbb{k} \neq \emptyset$  en la que se definen dos operaciones: Adición (+) y multiplicación ( $\cdot$ ), la cual cumplen los siguientes axiomas:

1. Cerradura o clausura:  $\forall a, b \in \mathbb{k} ; a + b \in \mathbb{k} \wedge ab \in \mathbb{k}$
2. Asociativa  $(a+b)+c=a+(b+c)$ ;  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  ;
3. Conmutativa:  $a+b=b+a$ ;  $ab = b \cdot a$
4. Existencia del elemento neutro:  $\exists 0 \in \mathbb{k}$  tal que  $a+0=a$  ;  $a \cdot 1=a$
5. Presencia del elemento opuesto e inverso:  $\forall a \in \mathbb{k}, \exists (-a) \in \mathbb{k}$  tal que  $a+(-a)=0$  y  $\forall a \neq 0 \in \mathbb{k}, \exists a^{-1} \in \mathbb{k}$  tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$
6. Distributiva:  $a(b+c) = ab+ac$

**Ejemplo:** Los conjuntos  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son cuerpos.

### 1.2. Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de filas y columnas, cuyos elementos están en el cuerpo  $\mathbb{k}$  ( $a_{ij} \in \mathbb{k}$ ) y se expresa de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , donde  $(1 \leq i \leq m)$  y  $(1 \leq j \leq n)$ . Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas se denomina matriz  $m$  por  $n$ , o matriz  $m \times n$ .



### 1.3. Clases de Matrices

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

#### 1.3.1. Matrices Rectangulares

Son aquellas matrices donde el número de filas y número de columnas son diferentes ( $m \neq n$ ) y su orden es  $m \times n$ .

**Ejemplo 1:** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 7 \\ 0 & 1+i & 5 \end{pmatrix}$  es de orden  $2 \times 3$ .

Donde sus filas son:  $F_1 = (2 \ i \ 7)$   $F_2 = (0 \ 1+i \ 5)$

y sus columnas son:  $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$   $C_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$   $C_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

#### 1.3.2. Matrices cuadradas

Son aquellas matrices donde el número de filas es igual al número de columnas ( $m = n$ ), su orden es  $n \times n$  o de orden  $n$ .

**Ejemplo 2:** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  es de orden 3.

Donde sus filas son:  $F_1 = (1 \ 0 \ 3)$   $F_2 = (2 \ -1 \ 0)$   $F_3 = (5 \ -2 \ 4)$

y sus columnas son:  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$   $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$   $C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

#### 1.3.3. Matriz Diagonal:

Una matriz cuadrada se considera diagonal si todas sus entradas fuera de la diagonal principal son cero. Esto es  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$  pero para algún  $a_{ii} \neq 0$ .

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

#### 1.3.4. Matriz Escalar:

Es una matriz diagonal con  $a_{ii} = \lambda$  donde  $\lambda \in \mathbb{k}$ .



$$E_n = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

### 1.3.5. Matriz identidad:

Es una matriz escalar con  $a_{ii} = 1, \forall i$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.3.6. Matriz triangular superior:

Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  es triangular superior si  $a_{ij} = 0, \forall i > j$ .

$$T_s = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### 1.3.7. Matriz triangular inferior:

Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  es triangular inferior si  $a_{ij} = 0, \forall i < j$ .

$$T_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### 1.3.8. Transpuesta de una matriz:

La transpuesta de una matriz A se obtiene intercambiando sus filas y columnas, y se representa con el símbolo  $A^t$ . Si la matriz A es de orden  $m \times n$  entonces la matriz  $A^t$  es de orden  $n \times m$ .

**Ejemplo 3:** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 7 \\ 0 & 1+i & 5 \end{pmatrix}$  es de orden  $2 \times 3$  entonces la matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ i & 1+i \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ es de orden } 3 \times 2.$$



### Propiedades:

1.  $(A^t)^t = A$
2.  $(\lambda A)^t = \lambda A^t, \lambda \in \mathbb{K}$
3.  $(A+B)^t = A^t + B^t$
4.  $(AB)^t = B^t A^t$

#### 1.3.9. Matriz simétrica:

Una matriz cuadrada  $A$  es simétrica  $\Leftrightarrow A = A^t$

**Ejemplo 4:** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$  es simétrica.

#### 1.3.10. Matriz antisimétrica:

Una matriz cuadrada  $A$  es antisimétrica  $\Leftrightarrow A = -A^t$

**Ejemplo 5:** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$  es antisimétrica

#### 1.3.11. Matriz ortogonal:

Una matriz cuadrada  $A$  es ortogonal si y solo si  $A^{-1} = A^t$ . Esto es  $AA^t = I$

#### 1.3.12. Matriz Involutiva:

Una matriz cuadrada  $A$  es involutiva si  $A^2 = I$ .

#### 1.3.13. Matriz Idempotente:

Una matriz cuadrada  $A$  es idempotente si  $A^2 = A$ .

#### 1.3.14. Matriz Hermítica:

Es una matriz cuadrada  $A$  con elementos en  $\mathbb{C}$  tal que  $A = (\bar{A}^t)^t$

### 1.4. Operaciones con Matrices

Sea  $M = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = \{A : A \text{ es una matriz de orden } m \times n\}$  el conjunto de matrices con elementos en el cuerpo  $\mathbb{K}$  de orden  $m \times n$ .

**Relación de igualdad:** Sean  $A, B \in M$  diremos que estas matrices son iguales si

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$



Definimos la *Adición* como la relación:  $+: M \times M \rightarrow M$  dada por  $+(A, B) := A + B$

tal que: si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  entonces  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

*Axiomas de la adición:*

A1.  $A + B = B + A$

A2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$

A3.  $\exists \theta$  matriz nula tal que  $A + \theta = \theta + A = A$

A4.  $\forall A, \exists (-A)$  tal que  $A + (-A) = 0$

Definimos la *Multipliación* de un escalar por una matriz como la relación:

$\bullet: \mathbb{k} \times M \rightarrow M$

Dada por  $\bullet(\lambda, A) = \lambda A$  tal que: si  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  entonces  $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$

**Axiomas de la multiplicación:**

M1.  $\alpha(\lambda A) = \lambda(\alpha A) = (\alpha\lambda)A$

M2.  $1A = A$

**Distributiva**

D1.  $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$

D2.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Así, nuestro conjunto  $(M, +, \bullet, \mathbb{k})$  es llamado **espacio vectorial** sobre el cuerpo  $\mathbb{k}$ .

### 1.5. Multiplicación de Matrices

Sean las matrices  $A \in M_{m \times n}$  y  $B \in M_{n \times p}$ , el producto de las mismas es otra matriz

$C \in M_{m \times p}$ , esto es  $AB = C$  tal que: si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{entonces cada elemento}$$

$$c_{ij} \text{ se determina de la siguiente manera: } c_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$



**Observación:** Dos matrices  $A$  y  $B$  puede haber producto si el número de filas de  $A$  es igual al número de columnas de  $B$ .

**Ejemplo 6:** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , hallar si existen  $AB$  y  $BA$ .

**Solución:** Notemos que  $AB$  si existe, debido que el número de columnas de  $A$  es igual al número de filas de  $B$ , mientras que  $BA$  no existe y que el número de columnas de  $B$  es diferente al número de filas de  $A$  ( $2 \neq 3$ ).

Ahora hallemos  $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$  donde cada  $c_{ij}$  es el producto escalar (producto

interno) de la fila  $i$  de  $A$  con la columna  $j$  de  $B$ .

$$c_{11} = (0 \ 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \quad c_{12} = (0 \ 5) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -5; \quad c_{21} = (3 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3; \quad c_{22} = (3 \ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -7$$

$$c_{31} = (4 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4; \quad c_{32} = (4 \ -2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -6$$

Luego la matriz  $C$  producto de  $A$  y  $B$  es  $C = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ .

### Propiedades:

1. *Asociativa:* Sean las matrices  $A$  de orden  $m \times n$ ,  $B$  de orden  $n \times p$  y  $C$  de orden  $p \times q$  entonces es correcta la ley de asociatividad  $A(BC) = (AB)C$

La matriz  $ABC$ , definida por cualquiera de los dos lados es una matriz de orden  $n \times q$ .

**Nota:** Esta ley se extiende a más de tres matrices.

2. *Distributiva:* Si las sumas y el producto que siguen están definidos, entonces

$$i) A(B+C) = AB + AC$$

$$ii) (A+B)C = AC + BC$$

3. *No conmutativa:*  $AB \neq BA$  siempre que existan estos productos.

4.  $AI = IA = A$

**Ejemplo 7:** Sea  $f(x) = x^2 + x + 2$  y  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  hallar la traza de  $f(A)$ .



**Solución:** Reemplazando  $A$  en  $f$  se tiene  $f(A) = A^2 + A + 2I$

Luego hallando el producto:  $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$  y reemplazando en  $f$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 24 \end{pmatrix}, \text{ así } \text{tr}(f(A)) = 4 + 24 = 28.$$

**Ejemplo 8:** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,

resolver  $2(X + B) = 3[A - 2(B - X)] + C$

**Solución:** De la ecuación despejamos  $X$ , obteniendo

$$X = \frac{1}{4}(-3A + 8B - C)$$

$$X = \frac{1}{4} \left[ -3 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & 56 \\ 32 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -18 & 40 \\ 38 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 10 \\ \frac{19}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

## 1.6. Determinante de una Matriz

Sea el conjunto  $M = M_n(\mathbb{k}) = \{A : A \text{ es un matriz cuadrada de orden } n\}$ , el determinante es la relación:

$$\begin{aligned} \det : M &\rightarrow \mathbb{k} \\ A &\rightarrow \det(A) = |A| \end{aligned}$$

Se define como:

Para  $n = 1$  la matriz es  $A = (a_{11})$  entonces  $|A| = a_{11}$

Para  $n = 2$  la matriz es  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  entonces  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Para  $n = 3$  la matriz es  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  entonces por el *método de Laplace* fijando

la fila uno, se tiene  $|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$



Luego aplicando el método de Laplace para una matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  de orden

$n$  y fijando la  $i$ -ésima fila se tiene:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A(i/j)|$$

Donde  $|A(i/j)|$  Es el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna.

**Propiedades:**

1.  $|AB| = |A||B|$
2.  $|A^t| = |A|$
3.  $|A^m| = |A|^m$
4.  $|\lambda A_n| = \lambda^n |A|$
5.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
6. Si cualquiera de las filas o columnas de  $A$  es el vector nulo, entonces  $|A| = 0$ .
7. Si dos columnas o filas de  $A$  son proporcionales entre si, entonces  $|A| = 0$ .
8. Si se intercambian dos columnas o filas  $\det(A)$  el determinante de la matriz obtenida es igual al  $\det(A)$  multiplicado por  $(-1)$ .
9. Si una matriz  $A$  es triangular, entonces su determinante es la multiplicación de los valores de su diagonal.

**Ejemplo 9:** Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

**Solución:** Usando el método de Laplace, y fijando la tercera fila se obtiene:

$$|A| = (-1)^{3+1} (-2) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} (3) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} (5) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-2)(0) + (-1)(3)(6+4) + (5)(0) = -30$$

También podemos avanzar observando que la segunda columna tiene más ceros, lo que nos permite identificar el elemento no nulo de esa columna y determinar su posición correspondiente:



$$|A| = (-1)^{3+2} (3) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(3)(6+4) = -30$$

**Ejemplo 10:** Calcular  $L = \sqrt{\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}} + \sqrt{\begin{vmatrix} a-b & -2b \\ 2a & a-b \end{vmatrix}}$

**Solución:** Encontrando los determinantes en las raíces, se tiene

$$L = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} + \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}$$

Desarrollando los binomios y reduciendo términos semejantes, se llega

$$L = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

Lo cual son trinomios cuadrados perfectos, esto es

$$L = \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(a+b)^2} = a-b+a+b = 2a$$

**Ejemplo 11:** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  si  $2AC = B^4$ , hallar  $\det(C')$

**Solución:** En la igualdad aplicamos determinante a ambos lados

$$|2AC| = |B^4|$$

Usando propiedades de determinantes, se tiene.

$$2^2 |A||C| = |B|^4$$

$$|C| = \frac{|B|^4}{4|A|}$$

Luego,  $|A|=3$  y  $|B|=3$  reemplazando en la ecuación anterior se llega

$$|C'| = \frac{3^4}{4 \cdot 3} = \frac{27}{4}$$

### 1.7. Transformaciones elementales entre filas de una matriz

Dado una matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  las operaciones elementales que se hacen sobre las filas de  $A$ ; son:

1. Permutar dos filas
2. Producto de una fila por un escalar
3. Suma de una fila el múltiplo de otra fila.



**Nota:** Con las operaciones elementales entre filas de una matriz, se usa para hallar:

- El rango de una matriz.
- La inversa de una matriz.
- El determinante de una matriz.
- Soluciones de ecuaciones lineales (Método de Gauss Jordan)

Propiedad **para determinantes:** Supongamos que la matriz  $B$  se ha obtenido de la matriz  $A$ , sumando sucesivamente el múltiplo de una fila a las otras filas, entonces

$$|B| = |A|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 12: Calcular el determinante de la matriz

**Solución:** Usamos transformaciones elementales entre filas

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 5F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 7F_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 2F_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-16)(10) = 160$$

**Ejemplo 13:** Calcular el determinante de la matriz  $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

**Solución:** Usando transformaciones elementales entre filas

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_4 \rightarrow F_4 + F_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 5 & 1 & -3 & -7 & 9 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix} \text{ de esto se tiene que la } F_4 \text{ y } F_5$$

son proporcionales, así  $|A| = 0$ .



### 1.8. Rango de una matriz

Sea una matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , indicamos que el valor positivo " $r$ " es el rango de la matriz  $A$ , si hay una submatriz cuadrada  $B$  de  $A$  de orden  $r$ , tal que,  $\det(B) \neq 0$  y el determinante de cualquier submatriz cuadrada de  $A$  mayor orden que  $B$  es igual a cero.

**Notación:** El rango de la matriz  $A$ , la denotamos por  $\rho(A)$ .

**Propiedades:** Dada la matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  se cumplen:

1.  $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$
2.  $\rho(A^t) = \rho(A)$
3. Si  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  entonces  $\rho(A) < n$ , si y sólo si  $\det(A) = 0$ .

### 1.9. Equivalencia de Matrices:

Indicamos que la matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  es semejante a la matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , si y sólo si,  $B$  puede calcularse un número finito de operaciones elementales sobre  $A$ .

Notación:  $A \sim B$  se lee " $A$  es equivalente a  $B$ ".

**Propiedad:** Si  $A \sim B$ , entonces  $\rho(A) = \rho(B)$ .

**Ejemplo 14:** Hallar el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

**Solución:** Haciendo transformaciones elementales entre filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 2F_1 \\ F_5 \rightarrow F_5 - 5F_1 \end{array} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + 2F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - 4F_3 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 2F_3 \\ F_5 \rightarrow F_5 - 5F_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} F_4 \rightarrow F_4 - \frac{1}{2}F_2 \\ F_5 \rightarrow F_5 - F_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B, \text{ luego el rango es el número de filas no nulas, esto es } \rho(A) = 3 .$$

### 1.10. Inversa de una Matriz

Una matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  es invertible (o no singular) si existe una matriz  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  con la propiedad de que:  $AB = BA = I$  siendo  $I$  la matriz identidad. Tal matriz  $B$  es única. Notación: Si  $B$  es la inversa de  $A$ , la denotaremos por  $A^{-1}$ . (Aguirre,2024)

### 1.11. Existencia de la Inversa de una Matriz

- i. La matriz  $A_n$  tiene inversa, si y sólo si  $\rho(A) = n$ .
- ii. La matriz  $A_n$  tiene inversa, si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

### 1.12. Métodos para Hallar la Inversa de una Matriz

La inversa de una matriz cuadrada, si existe, puede determinarse a través de los siguientes métodos:

1. Calculando la ecuación  $AB = I$ , donde  $B$  es la matriz incógnita por hallarse.
2. Aplicando la fórmula:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$
3. Aplicando las operaciones elementales entre filas.

#### Propiedades:

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3.  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4.  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
5.  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \forall n \in \mathbb{A}^+$
6.  $I^{-1} = I$



**Ejemplo 15:** Hallar la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Solución:** Para hallar la inversa de una matriz usaremos el método “por operaciones elementales entre filas de una matriz” esto es:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1
 \end{array} & F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\
 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1
 \end{array} & F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1; \quad F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\
 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1
 \end{array} & F_2 \rightarrow \left(\frac{-1}{3}\right)F_2 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\
 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1
 \end{array} & F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2; \quad F_3 \rightarrow F_3 + 5F_2 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 11/6 & -5/3 & 1
 \end{array} & F_3 \rightarrow (-1)F_3 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1
 \end{array} & F_1 \rightarrow F_1 + F_3; \quad F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -8/3 & 7/3 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 13/3 & -11/3 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1
 \end{array}
 \end{array}$$

Así; la matriz inversa de  $A$  es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 1.13. Ejercicios de Aplicación

1. Dada la matriz  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$  se dice que el triángulo  $T_B$  está asociado a la matriz  $B$ , si tiene como vértices  $(b_{11}, b_{21}); (b_{12}, b_{22}); (b_{13}, b_{23})$ . Sean las matrices



$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ , graficar y hallar el área triángulo asociado a la matriz  $AC$ .

2. Calcular el valor de "m" de modo que La ecuación equivalente de:  $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix} = 8$  tenga raíces iguales.

3. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  calcular, si existe, la matriz  $X$  tal que  $X.A = (1 \ 0 \ -1)$

4. Dada La matriz:  $H = \begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$  tal que  $|H| = 4$ , calcule la  $tr(H)$

5. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$  hallar el valor de  $m$  para qué  $A^2 - 2A + I = 0$

6. Sean la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Hallar:

a.  $A^2 + B^2$

b.  $3A - BA$

c.  $A^2 - 5B$

7. Calcular  $A^{-1}$  de las siguientes matrices.

a.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

b.  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$



c.  $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d.  $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

e.  $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

f.  $F = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

g.  $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. Resolver la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Encontrar una matriz  $X$ , tal que  $AX = B$ , siendo:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a. Halla los valores de  $k$  para los que se verifica  $|A \cdot B| = 0$

b. ¿Para qué valores de  $k$  se verifica  $|B \cdot A| = 0$  ?

11. Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  determinar la matriz  $X$  en la ecuación  $(AX^t + A^{-1})^t = 3A - I$

12. Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Hallar la traza de "X" en:  $(X - A)^t = -2A + 3B^t$



13. Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $n$ . Demostrar que si  $A$  es invertible, entonces:

$$\det(B) = \det(A^{-1}BA)$$

14. Demostrar que si  $A$  es idempotente y  $B$  es ortogonal, entonces  $B^tAB$  es idempotente

15. Demostrar que: si  $A$  es simétrica, entonces  $B^tAB$  es simétrica cualquiera que sea  $B_n$ .

16. Sea  $A$  una matriz cuadrada, si  $A$  es involutiva entonces  $\frac{1}{2}(I - A)$  es idempotente.

17. Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden 3, tales que existen  $A^{-1}$  y  $A^2 = 2B^3$ ,  $|A^{-1}| = 4|B|$ , hallar

$$|A^5|$$

18. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices tales que  $A$  es de orden  $3 \times p$ ,  $B$  es de orden  $m \times n$  y  $C$  es de orden  $q \times 4$ . Sabiendo que  $BA^t$  es de orden  $2 \times q$  y  $B^tB = C^tC$ . Hallar los valores de  $p$ ,  $q$ ,  $m$  y  $n$

19. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices tales que  $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 4 & 1 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  con  $a \neq 0$ .

Hallar  $|A|$

20. Sabiendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de orden  $3 \times 3$  y además que:  $|A| = 1/2$ ,  $|B| = 3$ ,  $|C| = 2$ .

Calcular:

a.  $|A^tB| |3C^{-1}A|$

b.  $\frac{|2AB^2 + 4B^2| - |\sqrt{2}B|^2}{|A + 2I| - |I|}$

c.  $\frac{|B' - 2B'A|}{|4AB^2 - 2B^2|}$

d.  $\frac{|2A^2| - |A^2 - A^2B|}{|B - I| + |2I_3|}$

21. Halle los valores de  $\lambda$  que satisfacen la ecuación  $\det(A - \lambda I) = 0$ , para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Encuentre los valores de  $x$  tal que:  $\det \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{pmatrix} = 0$



23. Calcule el valor de  $x$  tal que:  $\det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{pmatrix}$

24. Hallar el rango de la matriz

a.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 & 9 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & 13 & -21 \\ 14 & 37 & 47 & -75 \\ 6 & 15 & 21 & -33 \end{pmatrix}$

### REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

Del Valle. (2010). *Álgebra Lineal para estudiantes de Ingeniería y Ciencias*. Mexico: Mc Grarw-Hill.

Lazaro, M. (2010). *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Learning Editores.