

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
COMISIÓN ORGANIZADORA



FACULTAD DE INGENIERÍA
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

***Separata de Programación Lineal en la
Ingeniería.***

Autor:

Mg. Fuentes Maza Frans
Mg. Damián Sandoval Juan Carlos
Mg. Damián Sandoval Leonardo

Jaén, octubre 2024.



Contenido

PRESENTACIÓN	3
1. Programación Lineal	4
1.1. Formulación de modelo de Programación Lineal	4
1.2. Función Objetivo	5
1.3. Restricciones	5
1.4. Región factible	6
2. Ejercicios Resueltos	9
3. Ejercicios propuestos.....	15
4. Referencias Bibliográficas	19



PRESENTACIÓN

En mundo tan competitivo, nos enfrentamos a la necesidad de distribuir recursos limitados de manera que se maximice su utilidad, invertir en diferentes proyectos para obtener el mayor rendimiento posible, o establecer políticas de producción que minimicen costos. En muchos casos, un modelo basado en relaciones lineales se convierte en una aproximación efectiva para abordar estos problemas. La maximización o minimización de recursos ya sean materiales, económicos, tiempo, mano de obra, entre otros es fundamental en la formulación de problemas que se expresan mediante la función objetivo lineal junto con restricciones expresadas como desigualdades lineales, lo que se denomina P.L. La separata, se centra en problemas de programación lineal con dos variables, que permiten un análisis geométrico y facilitan una mejor comprensión de los fundamentos de esta disciplina.

Desde una perspectiva ingenieril, es crucial tener en cuenta la aplicación práctica de estos modelos. La programación lineal no es solo una herramienta teórica; también se puede aplicar en situaciones del mundo real, como la optimización de procesos industriales, la gestión de proyectos y la asignación eficiente de recursos. Comprender las limitaciones y posibilidades de la programación lineal ayuda a los ingenieros a desarrollar soluciones más efectivas y sostenibles. Esperamos que esta separata contribuya al estudiante en el aprendizaje de un tema muy importante en investigación de operaciones.

Los autores.

1. Programación Lineal

Muchos problemas prácticos requieren maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas restricciones. Por ejemplo, un fabricante podría desear maximizar una función de utilidad, teniendo en cuenta las limitaciones impuestas por la capacidad de la maquinaria y la disponibilidad de mano de obra (Estrella, 2024).

Ahora, exploraremos cómo abordar estos problemas cuando la función a maximizar o minimizar es lineal. Una función objetivo en x y y tiene la siguiente forma.

Ahora, consideraremos cómo $Z = ax + by$

donde a y b son constantes. También se debe de establecer las restricciones, y que se presentan por un sistema de desigualdades lineales que pueden ser “ \leq ” o “ \geq ” o ecuaciones lineales en x y y , además que las variables sean positivas. Un problema que involucra todas estas condiciones se denomina problema *de programación lineal*.

En un problema de programación lineal, la función a ser maximizada o minimizada es denominada **función objetivo**. Pero existen un número infinito de soluciones para el sistema de restricciones (llamadas **soluciones factibles** o puntos **factibles**), la meta es encontrar una que sea una **solución óptima** (esto es, una que dé el valor máximo o mínimo de la función objetivo) (Estrella, 2024).

1.1. Formulación de modelo de Programación Lineal

Para la formulación de un modelo de programación lineal trabajaremos el siguiente problema:

Una empresa produce dos tipos de productos: manuales y eléctricos. Ambos requieren el uso de tres máquinas: A, B y C. La Tabla 1 presenta la información relevante sobre la fabricación de estos artículos. Cada artículo manual necesita 2 horas de la máquina A, 1 hora de la máquina B y 1 hora de la máquina C. Por otro lado, un artículo eléctrico requiere 1 hora de la máquina A, 2 horas de la máquina B y 1 hora de la máquina C (Estrella, 2024). Además, se supone que las horas disponibles por mes para las máquinas A, B y C son 180, 160 y 100, respectivamente. La ganancia por cada artículo manual es de \$4, mientras que por cada artículo eléctrico es de \$6. Si la empresa puede vender todos los artículos que

produzca, ¿cuántos de cada tipo debería fabricar para maximizar su utilidad mensual?

Tabla 1 información sobre fabricación de artículos

	A	B	C	Util/Und
Manual	2 horas	1 horas	4 horas	\$ 4.00
Eléctrico	1 horas	2 horas	1 horas	\$ 6.00
Horas disponibles	180	160	10	

Para dar solución al problema, sean z y w el número de artículos manuales y eléctricos que se fabrican en un mes, respectivamente. Dado que la producción de artículos debe ser positiva,

$$z \geq 0 \quad , \quad w \geq 0$$

En la maquina A, el tiempo que toma en trabajar sobre z artículos manuales es $2z$ horas y el tiempo que utiliza trabajar en w artículos eléctricos es $1w$ horas (Estrella, 2024). La suma de estos tiempos no puede ser mayor que 180 (Estrella, 2024), de modo que

$$2z + w \leq 180$$

De manera semejante, las restricciones para las máquinas B y C dan

$$z + 2w \leq 160 \quad y \quad z + w \leq 100$$

La utilidad P es una función de z y w , y está dada por la *función de utilidad*

$$P = 4z + 6w$$

1.2. Función Objetivo

Se requiere maximizar la función objetivo

$$P = 4z + 6w \quad (1)$$

s.a a restricciones para z y w

1.3. Restricciones

$$\begin{cases} z \geq 0 & (2) \\ w \geq 0 & (3) \\ 2z + w \leq 180 & (4) \\ z + 2w \leq 160 & (5) \\ z + w \leq 100 & (6) \end{cases}$$

1.4. Región factible

Por tanto, tenemos un problema de programación lineal. Las restricciones (2) y (3) son llamadas **condiciones de no negatividad**. La región que satisface de manera simultánea las restricciones de la (2) a la (6) está sombreada en la figura 1. Cada punto en esta región representa una solución factible y la región es llamada **región factible**. Aunque existe un número infinito de soluciones factibles, debemos encontrar una que maximice la función de utilidad.

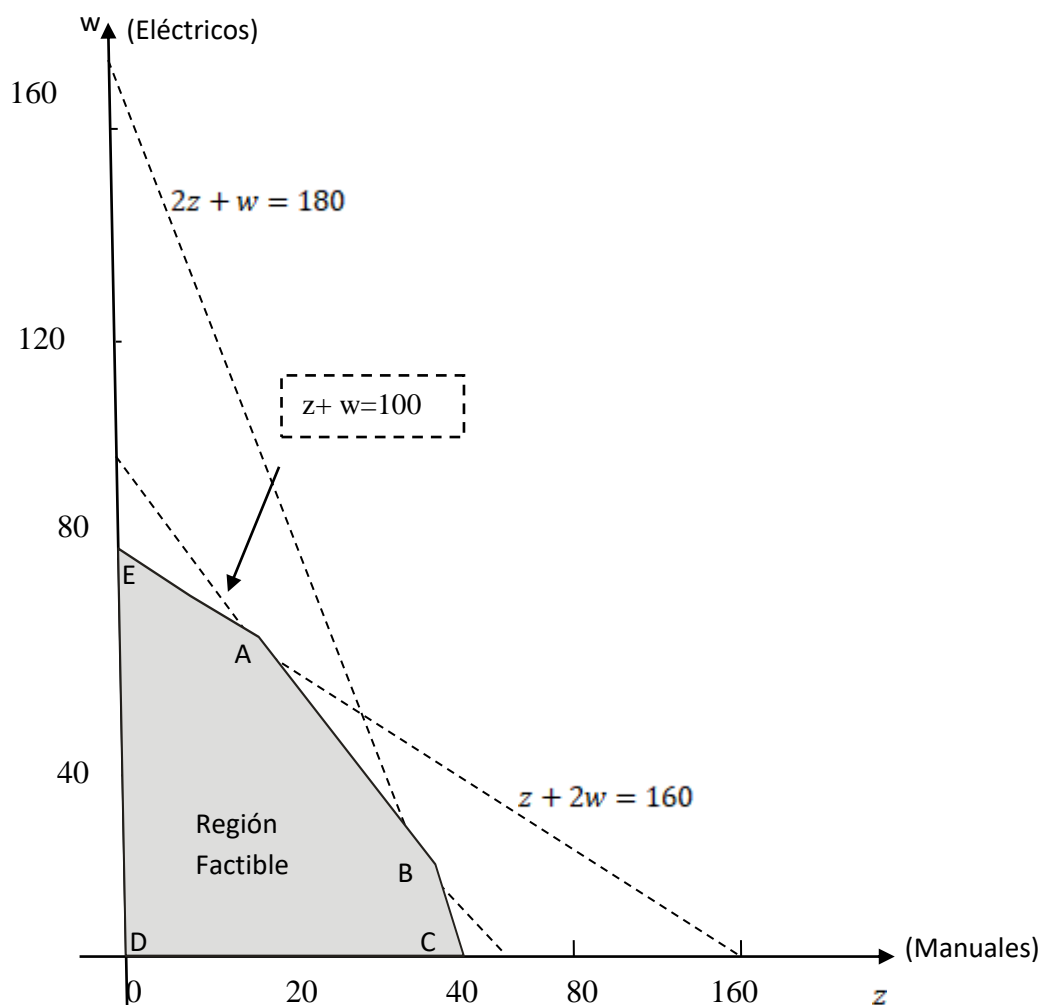


Figura 1 Región factible

La función objetivo $P = 4z + 6w$ es iguala a

$$z = -\frac{2}{3}w + \frac{P}{6}$$

Define una "familia" de rectas paralelas (Estrella, 2024), todas con la misma pendiente de $-\frac{2}{3}$ e intersección y $(0, \frac{P}{6})$. Por ejemplo, si $P = 600$, entonces obtenemos la recta

$$w = -\frac{2}{3}z + 100$$

Mostrada en la figura 2. La recta llamada **isoutilidad**, da todas las posibles opciones de z y w se obtiene una utilidad de \$600. Observe que esta línea de isoutilidad no tiene puntos en común con la región factible, mientras que la línea de isoutilidad para $P = 300$ (Estrella, 2024).

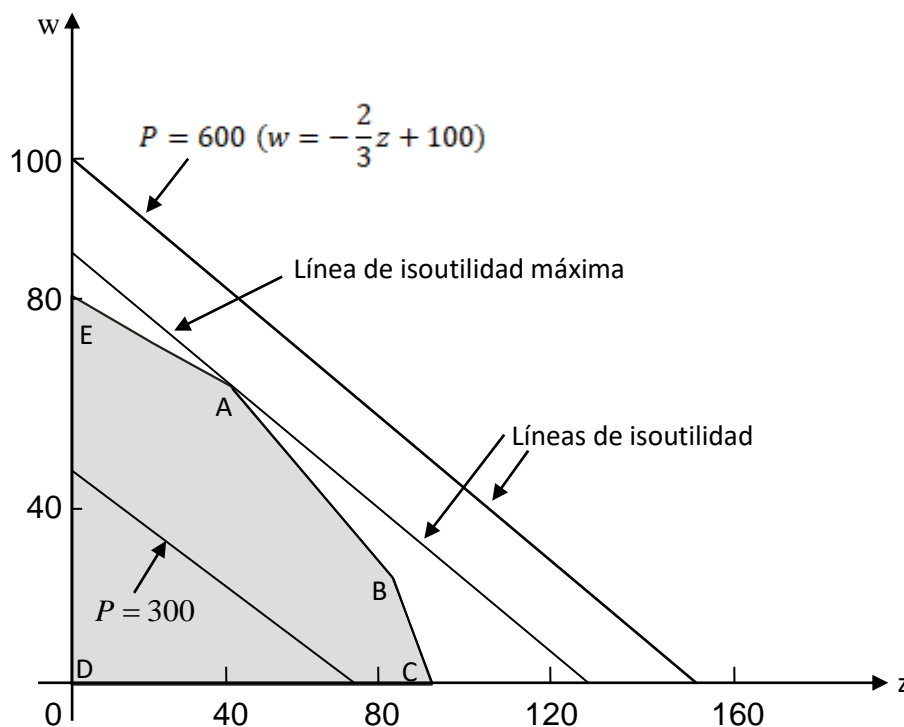


Figura 2. Líneas de isoutilidad y región factible

El número infinito de puntos en común con la región factible. Busquemos un miembro de la familia que tenga un punto factible y cuyo valor de P sea máximo (Estrella, 2024). Ésta es la recta cuya intersección es la más lejana del punto de origen (esto produce un valor máximo de P (Estrella, 2024) y, a la vez, debe tener algún punto de intersección



con la región factible. No es difícil observar que tal recta contendrá al vértice (punto extremo, esquina) A, cualquier recta de isoutilidad con una utilidad mayor no contendrá puntos de la región factible (Estrella, 2024).

De la **figura 1** vemos que A pertenece a la recta $z + w = 100$ y $z + 2w = 160$. Sus coordenadas pueden ser encontradas resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} z + w = 100 \\ z + 2w = 160 \end{cases}$$

Esto da $z = 40$ y $w = 60$. Sustituyendo estos valores en $P = 4z + 6w$, se determinó la utilidad máxima, en función de las restricciones, es de \$520, alcanzada al producir 40 artículos manuales y 60 eléctricos cada mes. Si una región factible puede ser inscrita dentro de un círculo, como se muestra en la **figura 2**, se denomina región factible acotada (Estrella, 2024). En caso contrario, se considera no acotada. Una región factible se considera no vacía si contiene al menos un punto; de lo contrario, es vacía. Por lo tanto, la región representada en la **figura 2** es una región factible acotada y no vacía.

Puede demostrarse que:

Una función lineal definida en una región factible acotada y no vacía tiene un valor máximo (o mínimo) que se puede encontrar en uno de sus vértices (puntos extremos o esquinas)

Este enunciado nos proporciona un método para hallar una solución óptima sin necesidad de trazar las rectas de isoutilidad, como hicimos anteriormente. Solo es necesario analizar la función objetivo para cada vértice de la región factible y luego elegir aquel vértice donde la función alcance su valor óptimo.

Según **figura 2** tiene los vértices **A**, **B**, **C**, **D** y **E**. se puede decir que el vértice **A** es (40,60). Para encontrar **B**, advertimos de la **figura 1** que debemos resolver al mismo tiempo (Estrella, 2024). $2z + w = 180$, $z + w = 100$. Esto da el punto **B** = (80,20).

De manera similar obtenemos todos los vértices:

$$\begin{aligned} \mathbf{VA} &= (40,60) & \mathbf{VB} &= (80,20) & \mathbf{VC} &= (90,0) & \mathbf{VD} &= (0,0) \\ \mathbf{VE} &= (0,80) \end{aligned}$$

Ahora evaluamos la función objetivo en cada uno de los puntos (Estrella, 2024):



$$P(A) = 4(40) + 6(60) = 520$$

$$P(B) = 4(80) + 6(20) = 440$$

$$P(C) = 4(90) + 6(0) = 360$$

$$P(D) = 4(0) + 6(0) = 0$$

$$P(E) = 4(0) + 6(80) = 480$$

Así **P** tiene un valor máximo de 520 en **A**, donde $z = 40$ y $w = 60$

La solución óptima para un problema de programación lineal está dada por el punto donde ocurre el valor óptimo de la función objetivo (Estrella, 2024). También incluiremos el valor óptimo de la función objetivo.

2. Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1

Se requiere maximizar $Z = 3x + y$, s.a restricciones

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

En la figura 3, la región factible es acotada y no vacía, lo que significa que Z alcanza su valor máximo en uno de los cuatro vértices. Las coordenadas de **A**, **B** y **D** son evidentes por inspección (Estrella, 2024). Para determinar **C** resolvemos de manera simultánea las ecuaciones $2x + y = 8$ y $2x + 3y = 12$, que dan $x = 3$ y $y = 2$ (Estrella, 2024). Así,

$$\mathbf{VA}=(0,0)$$

$$\mathbf{VB}=(4,0)$$

$$\mathbf{VC}=(3,2)$$

$$\mathbf{VD}=(0,4)$$

Analizando **Z** en estos vértices se tiene:

$$Z(A) = 3(0) + 0 = 0$$

$$Z(B) = 3(4) + 0 = 12$$

$$Z(C) = 3(3) + 2 = 11$$

$$Z(D) = 3(0) + 4 = 4$$

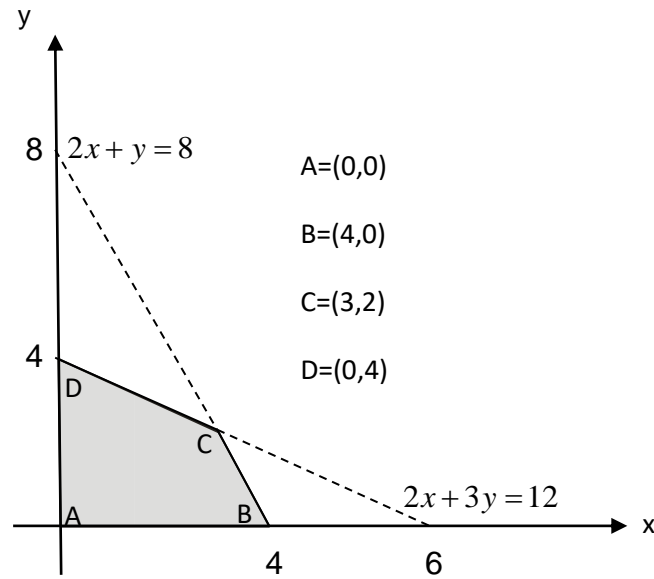


Figura 3: A, B, C y D son vértices de la región factible

Podemos indicar el **máximo** valor de **Z**, tiene las siguientes restricciones, sea 12 y se dé cuándo $x = 4$ y $y = 0$.

Región Factible vacía

Ejercicio 2: Región factible vacía

Minimizar $Z = 8x - 3y$ s.a restricciones

$$-x + 3y = 21$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Solución:

La primera restricción $-x + 3y = 21$ es una igualdad. La sección de las rectas y correspondiente a y se ilustra en la figura 4. Estas permanecerán como líneas punteadas hasta que establezcamos si están incluidas en la región factible o no. Un punto factible (x,y) debe tener $x \geq 0$ y $y \geq 0$ (Estrella, 2024), y estar sobre la recta superior punteada y sobre o por debajo de la recta inferior (ya que $y \leq 5 - x$). Pero no existen dichos puntos. De aquí que la región factible sea vacía y por lo tanto este problema no tenga solución óptima (Estrella, 2024).

Siempre que la región factible de un problema de programación lineal sea vacía, no habrá solución óptima.

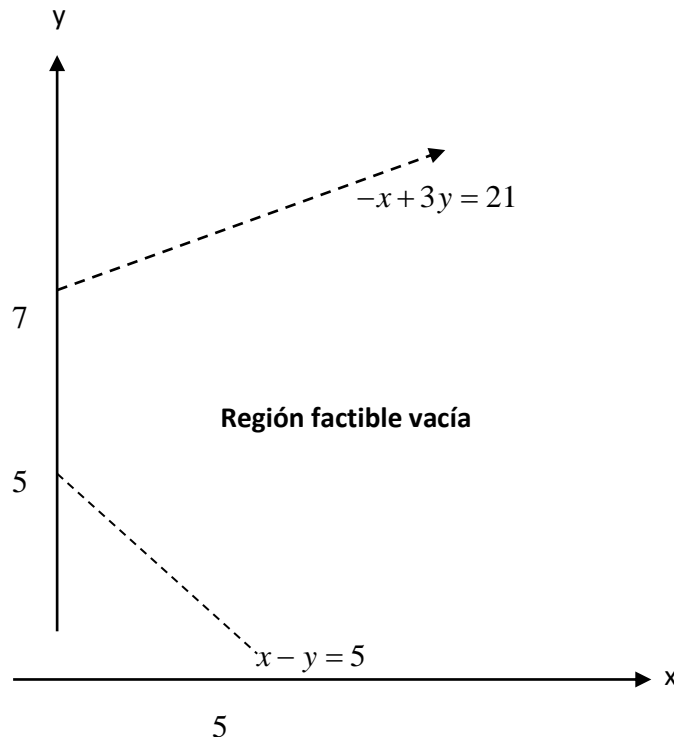


Figura 4 Región factible vacía

Región factible no acotada

Poniendo que la región acotada es:

$$y = 2 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Esta región corresponde a la sección de la recta horizontal $y=2$ que se muestra en la figura 5 (Andre, 2024). Dado que la región no puede ser encerrada dentro de un círculo, se considera no acotada. Vamos a enfocarnos en la maximización (Andre, 2024).

$$Z = x + y$$

Sujeta a las restricciones mencionadas anteriormente, dado que $y=2$, se tiene que

$Z = x+2$, Es evidente que, a medida que x aumenta sin límite, Z también lo hace. Por lo tanto, no hay puntos factibles que maximice Z , lo que implica que no existe una solución óptima. Podemos indicar que la solución es "no acotada" (Estrella, 2024).

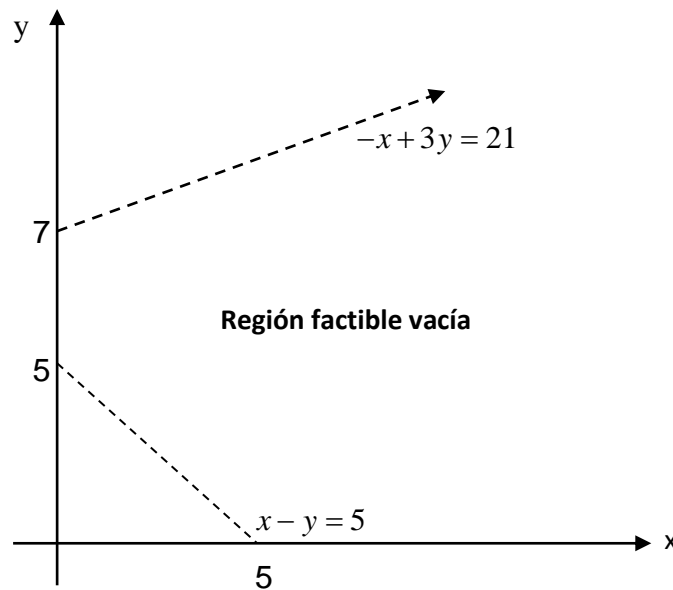


Figura 4 Región factible vacía

Requiriendo minimizar $Z = x + 2$ en la misma región. Como $Z = x + 2$, será mínima cuando x sea lo más pequeña posible, esto es cuando $x=0$ (Estrella, 2024). El valor mínimo de $Z = x + y = 0 + 2 = 2$ y la solución óptima es el vértice $(0,2)$ (Estrella, 2024).

Ejercicio 3: Región factible no acotada

Un agricultor adquiere abonos que están compuestos por tres nutrientes: A, B y C. lo necesario mínimo es de 160 unidades de A, 204 de B y 82 de C. En el mercado existen dos marcas de abonos. “Fertimax” cuesta \$6 por bolsa y proporciona 3 unidades de A, 5 de B y 1 unidad de C (Andre, 2024). “ABONOS S” tiene un precio de \$4 por bolsa y ofrece 2 unidades de cada nutriente. Si el agricultor desea minimizar costos mientras satisface los requisitos de nutrientes, ¿cuántas bolsas de cada marca debe comprar? La información se resume de la siguiente manera (Andre, 2024):

Tabla 2 compuestos

	A	B	C	Costo/bolsa
Fertimax	3 unidades	5 unidades	1 unidad	\$ 6
ABONOS S	2 unidades	2 unidades	2 unidades	\$ 4
Unidades requeridas	160	204	82	



Solución:

Sea x la cantidad de bolsas de Fast Grow que comprará y , y la cantidad de bolsas de Easy Grow que se adquirirán. Nuestro objetivo es minimizar la función de costo.

$$C = 4x + 3y \quad (7)$$

Sujeta a las restricciones.

$$x \geq 0 \quad (8)$$

$$y \geq 9 \quad (9)$$

$$3x + 2y \geq 160 \quad (10)$$

$$5x + 2y \geq 200 \quad (11)$$

$$X + 2y \geq 80 \quad (12)$$

La región factible satisface las restricciones de la (8) a la (12) y está sombreada en la **figura 5** junto con las líneas de isocosto para $C=300$. La región factible es no acotada. El miembro de la familia de rectas $C = 4x + 3y$ que da un consto mínimo sujeto a las restricciones, interseca a la región factible en el vértice **B**. Aquí seleccionamos la línea de isocosto cuya intersección con el eje y fue más cercana al origen y que tenía al menos un punto en común con la región factible (Estrella, 2024). Las coordenadas de **B** serán encontradas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

Así $x = 40$ y $y = 20$ lo que da un costo mínimo de \$220. El agricultor debe comprar 40 bolsas de Fast Grow y 20 de Easy Groow

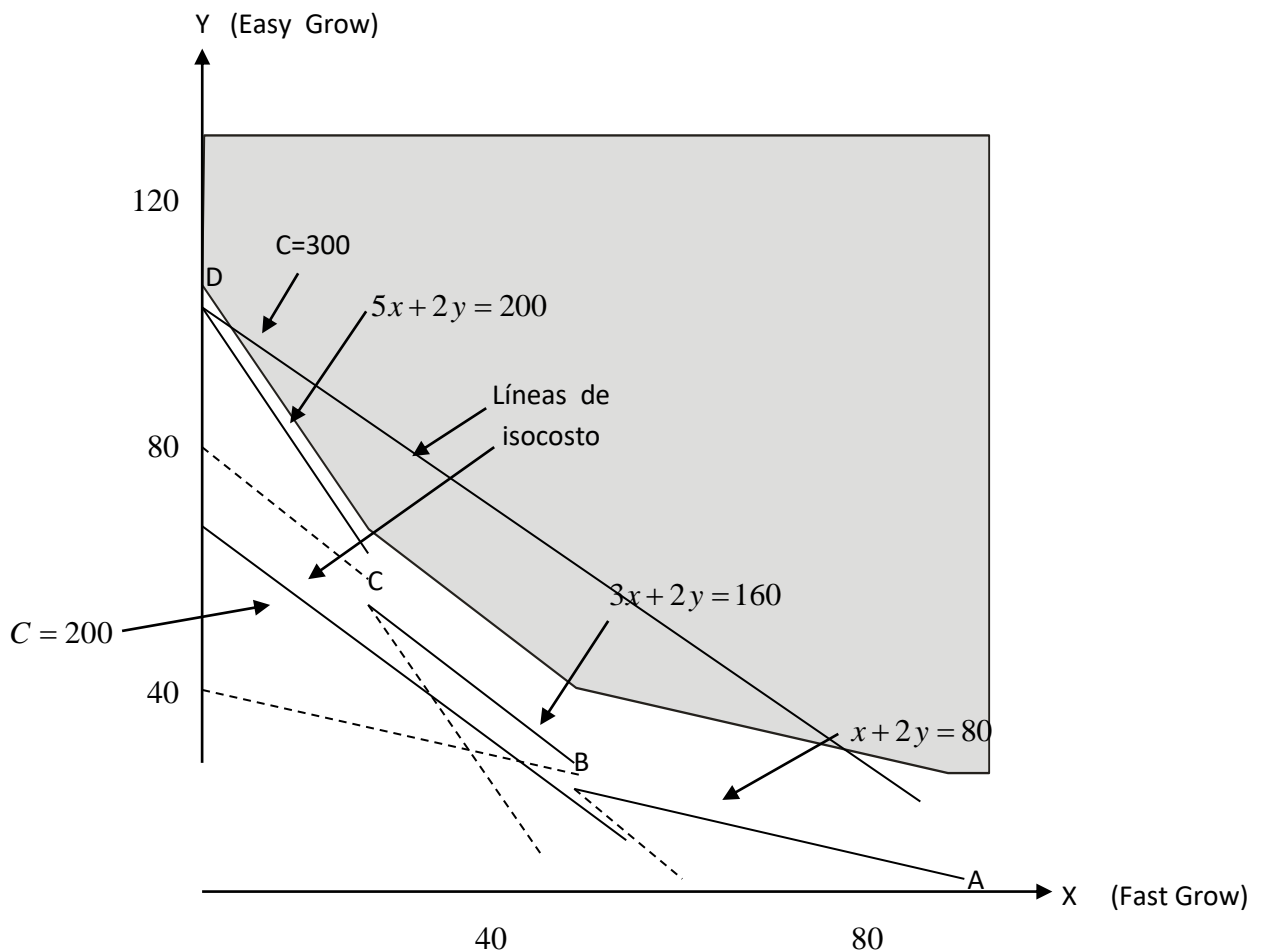


Figura 5: Costo mínimo en un vértice B de la región factible no acotada

En el **ejemplo 3** encontramos que la función $C = 4x + 3y$ tiene un valor mínimo en un vértice de la región factible no acotada. Por otra parte, suponga que queremos maximizar C en esa región y para ello nos proponemos evaluar C en todos los puntos extremos (vértices). Estos puntos son:

$$\mathbf{A = (80,0)} \quad \mathbf{B = (40,20)} \quad \mathbf{C = (20,50)} \quad \mathbf{D = (0,100)}$$

De lo cual

$$C(A) = 4(80) + 3(0) = 320$$

$$C(B) = 4(40) + 3(20) = 220$$

$$C(C) = 4(20) + 3(50) = 230$$

$$C(D) = 4(0) + 3(100) = 300$$

Una conclusión apresurada sería que el valor máximo de C es 320. Esto es ¡falso!

No existe valor máximo ya que las líneas de isocosto con valores arbitrariamente grandes de C intersecan a la región factible (Estrella, 2024).

3. Ejercicios propuestos

1. Una planta de concreto que recibe semanalmente una cantidad fija de agregados áridos (materia prima) para producir dos tipos de concreto de diferente resistencia a la compresión (uno que denominamos de resistencia normal y otro que llamamos de alta resistencia) (Alba Mendoza, 2024). La planta tiene garantizada la venta de su producción y cada tipo de concreto genera diferente rentabilidad a la empresa (Alba Mendoza, 2024).

Tabla 3 recursos (Alba Mendoza, 2024)

Recurso	Resistencia Normal	Resistencia Alta	Disponibilidad
Materia prima utilizada (m^3 por tonelada de concreto).	7 m^3 /ton	11 m^3 /ton	77 m^3 /semana
Tiempo requerido de producción (horas semanales de planta por tonelada de concreto)	10 hr/ton	8 hr/ton	80 hr/semana
Almacenamiento	9 ton	6 ton	
Utilidad o beneficio (miles dólares) por tonelada de concreto	150 dólares/ton	175 dólares/ton	

El objetivo es identificar la combinación de producción que maximice el beneficio económico de la empresa.

2. “PETRO PERÚ” tiene la opción de adquirir petróleo crudo ligero y pesado, con costos de \$10.5 y \$8.9 por barril, respectivamente. Cada tipo de petróleo produce diferentes cantidades de gasolina 90, gasolina 84 y combustible para reactores.

Tabla 4 costos de combustible

	Gasolina 90	Gasolina 84	Combustible
Petróleo Crudo ligero	0.45	0.25	0.37
Petróleo Crudo pesado	0.33	0.43	0.23



La refinería tiene un contrato que obliga a entregar un millón de barriles de gasolina 90, cuatrocientos mil barriles de gasolina 84 y doscientos cincuenta mil barriles de combustible para reactores. El objetivo es calcular cuántos barriles de cada tipo de petróleo crudo son necesarios para cumplir con esta demanda y reducir al mínimo los costos.

3. Maximizar $P = 10x + 12y$ sujeta a

$$x + y \leq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

4. Maximizar $P = 5x + 6y$ sujeta a

$$x + y \leq 80$$

$$3x + 2y \leq 220$$

$$2x + 3y \leq 210$$

$$x, y \geq 0$$

5. Maximizar $P = 4x - 6y$ s.a

$$y \leq 7$$

$$3x - y \leq 3$$

$$x + y \geq 5$$

$$x, y \geq 0$$

6. Minimizar $Z = x + y$ s.a

$$x - y \geq 0$$

$$4x + 3y \geq 12$$

$$9x + 11y \leq 99$$

$$x \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

7. Maximizar $Z = 4x - 10y$ s.a



$$x - 4y \geq 4$$

$$2x - y \leq 2$$

$$x, y \geq 0$$

8. Minimizar $Z = 20x + 30y$ s.a

$$2x + y \leq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$8x + 7y \geq 56$$

$$x, y \geq 0$$

9. Minimizar $Z = 7x + 3y$ s.a

$$3x - y \geq -2$$

$$x + y \leq 9$$

$$x - y = -1$$

$$x, y \geq 0$$

10. Maximizar $Z = 0.5x - 0.3y$ s.a

$$x - y \geq -2$$

$$2x - y \leq 4$$

$$2x + y = 8$$

$$x, y \geq 0$$

11. Minimizar $C = 2x + y$ s.a

$$3x + y \geq 3$$

$$4x + 3y \geq 6$$

$$x + 2y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

12. Minimizar $C = 2x + 2y$ s.a



$$x + 2y \geq 80$$

$$3x + 2y \geq 160$$

$$5x + 2y \geq 200$$

$$x, y \geq 0$$

13. Maximizar $Z = 10x + 2y$ s.a

$$x + 2y \geq 4$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

14. Minimizar $Z = y - x$ s.a

$$x \geq 3$$

$$x + 3y \geq 6$$

$$x - 3y \geq -6$$

$$x, y \geq 0$$

15. “Jaén SAC” trabaja dos centros mineros para extraer oro y plata. Operar la mina Saddle cuesta \$ 14 000 por día y produce 50 onzas de oro y 3000 onzas de plata cada día. Operará la mina Horseshoe cuesta \$ 16 000/día y produce 75 onzas de oro y 1000 onzas de plata cada día. La gerencia de la empresa ha establecido un objetivo de al menos 650 onzas de oro y 18 000 onzas de plata. ¿Cuántos días debe operarse cada mina de manera que el objetivo pueda lograrse con el costo mínimo?
16. En una hacienda de 105 hectáreas, se planea realizar diversas actividades: cultivar café y cacao, plantar peras y plátanos, y reforestar con cedro y eucalipto. Los beneficios por hectárea son: \$3 por café, \$2.5 por cacao, \$3.5 por peras, y \$4 por plátanos. Además, se recibe una subvención de \$5 por hectárea de cedro y \$4.5 por hectárea de eucalipto. Se requiere que al menos el 40% de la tierra se dedique a café y cacao, y como máximo el 35% a frutales o reforestación. El objetivo es determinar la distribución de la tierra para maximizar los beneficios.



4. Referencias Bibliográficas

Alba Mendoza, C. (8 de 10 de 2024). *Problema de Programación Lineal Restringida*.
Obtenido de <https://1library.co/document/zwvpmxdg-universidad-santo-tom%C3%A1s-bogot%C3%A1.html>

Andre, R. (8 de 10 de 2024). *Cálculo Básico con aplicación a la ciencia de la vida*.
Obtenido de <https://idoc.tips/calculo-basico-con-aplicacion-a-la-ciencia-de-la-vida-pdf-free.html>

Estrella, R. (8 de 10 de 2024). *Modelos para la toma de decisiones*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/slideshow/programacion-lineal-modelosparalatomadecisiones3sep2008/50242741> de 2024). *Modelos para la toma de decisiones*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/slideshow/programacion-lineal-modelosparalatomadecisiones3sep2008/50242741>