

UNIVERSIDAD NACIONAL DE JAÉN
COMISIÓN ORGANIZADORA



FACULTAD DE INGENIERÍA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

*Manual de Formulación de Programación
Lineal
CPM. y redes PERT*

Autor:

Mg. Fuentes Maza Frans
Mg. Damián Sandoval Juan Carlos
Mg. Damián Sandoval Leonardo

Jaén, octubre 2024.



CONTENIDO

PRESENTACIÓN	3
INTRODUCCIÓN	4
1. Método CPM	5
1.1. Formulación de programación lineal de CPM	5
1.2. Historia del modelo CPM	5
1.3. ¿Qué es el método CPM?	5
1.4. Componentes del CPM	5
1.5. Representación gráfica del CPM	6
1.6. Ejercicio aplicativo de la técnica CPM	11
2. Redes PERT	16
2.1. Historia de Redes PERT	16
2.2. ¿Qué es el método PERT?	16
2.3. ¿Cómo se construye una red PERT?	16
2.4. Duraciones probabilísticas	17
2.5. Pasos para el diagrama del enfoque probabilístico de PERT	17
2.6. Limitaciones de las redes PERT	20
2.7. Ejercicio aplicativo de redes PERT	20
3. DIFERENCIA ENTRE REDES PERT Y CPM	25
4. CONCLUSIONES	26
5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	26

PRESENTACIÓN

Este trabajo académico denominado Manual de Manual de Formulación de Programación Lineal CPM. y redes PERT se ha elaborado con el fin de apoyar a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Jaén, contar con un manual que les permita complementar los conocimientos adquiridos en la Universidad.

Invitamos a los estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional de Jaén a revisar este material académico, pues será muy útil en su formación académica de pregrado.

Atte. El Autor



INTRODUCCIÓN

La investigación de operaciones es de gran importancia en la ingeniería civil, pues esta disciplina utiliza modelos matemáticos y técnicas analíticas para resolver problemas complejos relacionados con la toma de decisiones en la planificación, diseño y gestión de proyectos de ingeniería civil. Algunas de las áreas en las que se aplica la investigación de operaciones en la ingeniería civil incluyen la optimización de la producción, la gestión de recursos, la planificación de proyectos y la toma de decisiones en la construcción.

El presente informe tiene como finalidad realizar una exhaustiva investigación sobre el tema “Formulación de programación lineal de CPM. Redes PERT”. Además, para facilitar una mejor comprensión del tema en estudio se desarrollarán dos ejercicios aplicativos que complementarán la teoría. El método de la ruta crítica (CPM) y la técnica de análisis de programas (PERT) son dos técnicas gráficas de programación lineal ampliamente utilizadas para la planificación y gestión de proyectos que nos facilitan el estudio del tiempo del proyecto y su impacto en el resultado.

Ambos métodos se utilizaron por primera vez a finales de los años 50 y fueron desarrollados por la empresa DuPont y la Marina de los Estados Unidos entre 1956 y 58 para la construcción de proyectiles y su aplicación condujo a reducir el tiempo proyectado de fabricación de 5 a 3 años.

1. Método CPM

1.1. Formulación de programación lineal de CPM

Existen modelos de redes que ayudan a planificar proyectos con muchas actividades en el caso de que se conoce la duración de cada actividad, se puede usar el Método del Camino Crítico (CPM) para calcular el tiempo total del proyecto y determinar cuáles actividades pueden retrasarse sin afectar la duración global.

1.2. Historia del modelo CPM

Fue elaborado en los años 1950 para agilizar proyectos complejos, el método CPM fue inicialmente utilizado por DuPont y Remington Rand Univac en mantenimiento y construcción. Desde ese momento se ha convertido en una herramienta clave para gestionar proyectos con actividades interdependientes.

1.3. ¿Qué es el método CPM?

El método de la ruta crítica (CPM) identifica las tareas esenciales para culminar un proyecto y establece la flexibilidad en el cronograma de ejecución. La ruta crítica es la secuencia más larga de actividades cuya demora afectará el tiempo total del proyecto.

1.4. Componentes del CPM

El modelo CPM utiliza tres elementos:

- a) tareas, Las tareas son las actividades que se requieren para llevar a cabo el proyecto.
- b) Duraciones, son el tiempo necesario para culminar cada tarea y
- c) Dependencias, describen las relaciones secuenciales entre tareas.

Existen otros elementos como:

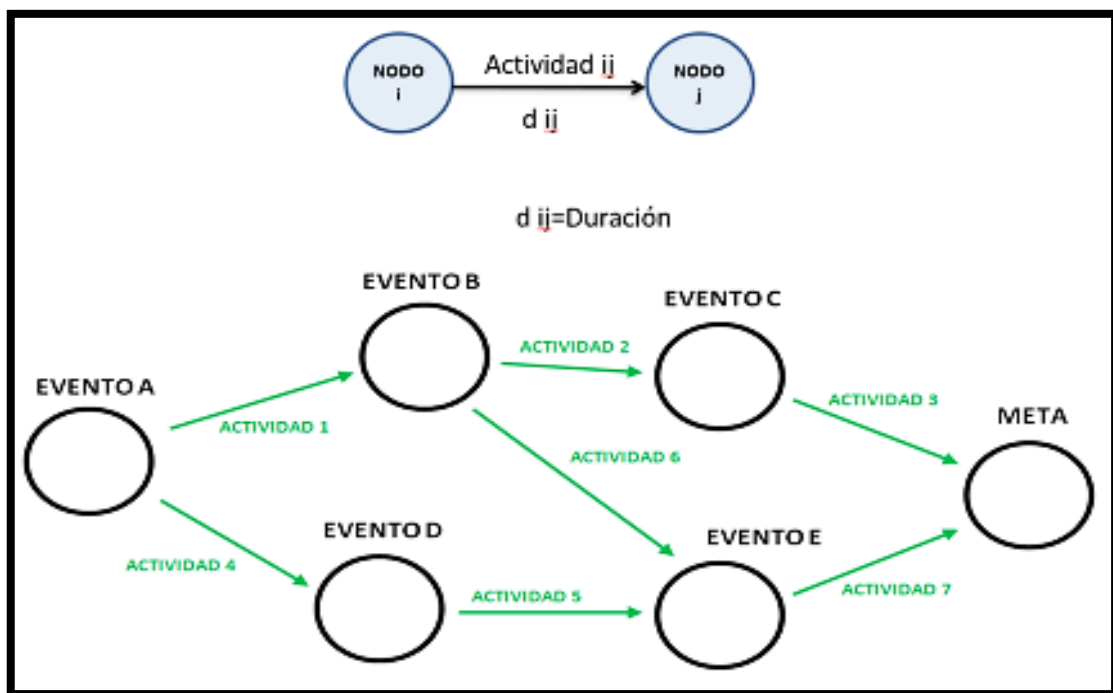
- **El tiempo más temprano o temprano:** Para un nodo i , es el momento más pronto en que puede ocurrir en el siguiente evento i .

- **El tiempo más tarde o tardío:** Para un nodo i , es el último momento en que puede ocurrir el evento sin afectar el tiempo total del proyecto.

1.5.Representación gráfica del CPM

Se representa gráficamente a través de un diagrama de flechas que forma una red cerrada, con un único inicio y fin donde todas las actividades están relacionadas. En esta red, cada tarea se simboliza con una flecha que conecta un nodo de inicio y uno de fin, y se identifica como "Aij", donde "i" y "j" corresponden a los eventos de inicio y finalización, respectivamente.

Figura 1 Representación gráfica del CPM



Fuente: Garza Chipana, 2013.

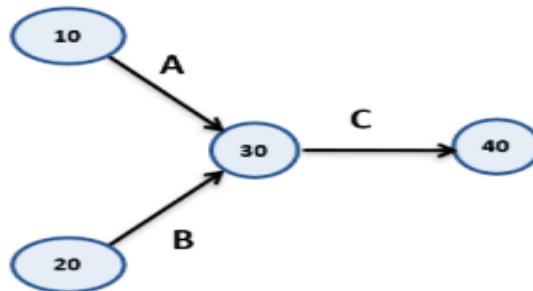
1.5.1. Actividades y sucesos del trazado de una red de flechas

- **Regla de dependencia:** La tarea B no puede empezar mientras que la tarea A no esté terminada.

**- Regla de Convergencia:**

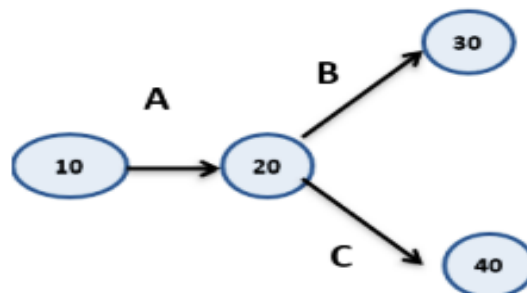
Una tarea no puede empezar hasta que todas las tareas que le preceden estén acabadas.

Una tarea no puede empezarse hasta que etapa inicial no ha sido alcanzada.

**• Regla de Divergencia:**

- Las tareas B y C no pueden empezar hasta que la tarea A esté terminada.

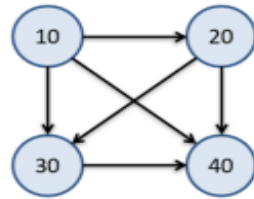
- No existe obligación de empezar a un tiempo las tareas B y C.

**1.5.2. Trazado de una red de flechas**

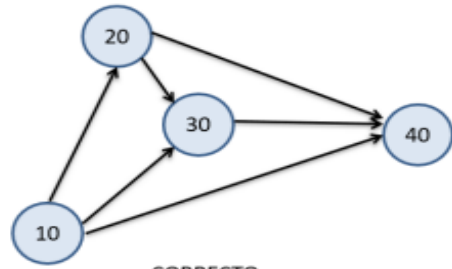
Elementos que definen una red de flechas: Relación de actividades; Tiempo de duración de cada actividad y Relación de precedencia.

1.5.3. Recomendaciones para el trazado de una red de flechas

- **PRIMERA:** Debe evitarse el cruce de flechas.

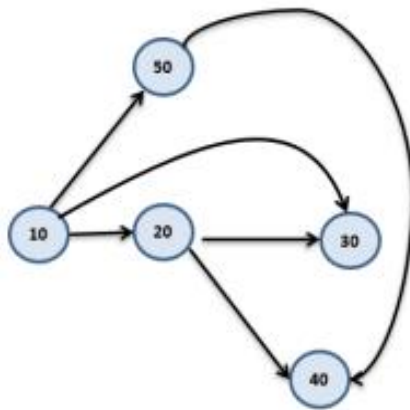


INCORRECTO

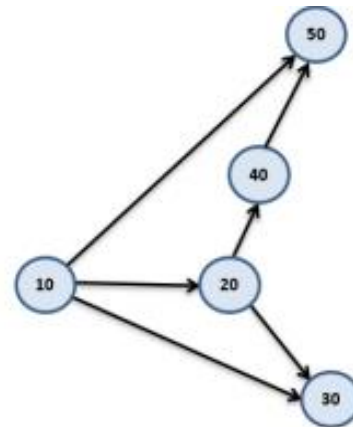


CORRECTO

- **SEGUNDA:** Manténgase todas las flechas rectas.

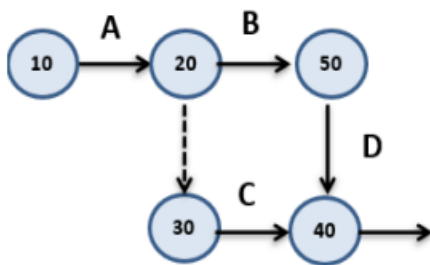


INCORRECTO

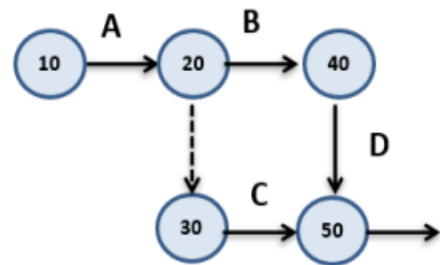


CORRECTO

- **TERCERA:** En la numeración de los nodos, siempre va $j > i$.

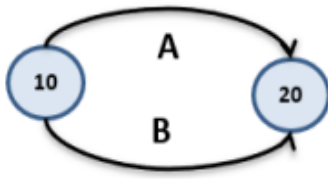


INCORRECTO

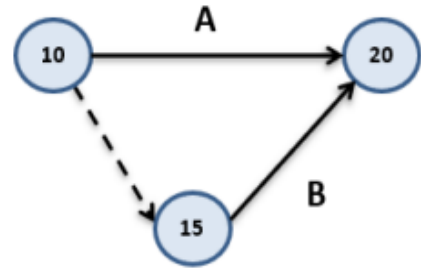


CORRECTO

- **CUARTA:** Cada actividad tiene una numeración única de su nodo de inicio y nodo de termino. Dos actividades no pueden tener el mismo origen y final.

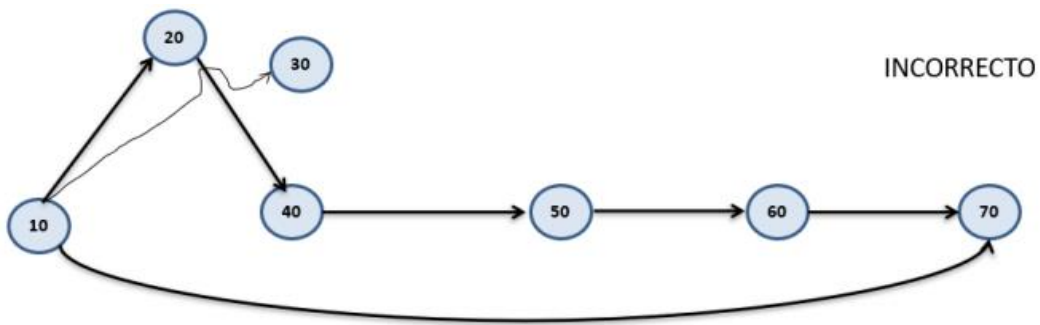


INCORRECTO

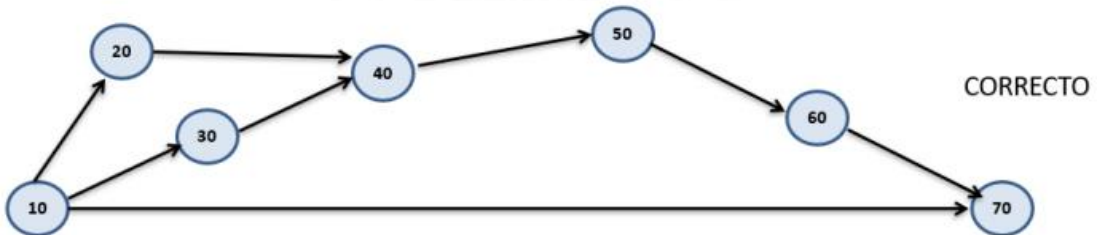


CORRECTO

- **QUINTA:** Evítese grandes variaciones en las longitudes de las flechas.



INCORRECTO



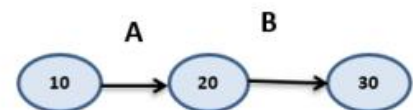
CORRECTO

- **SEXTA:** Elimínese las actividades ficticias redundantes.



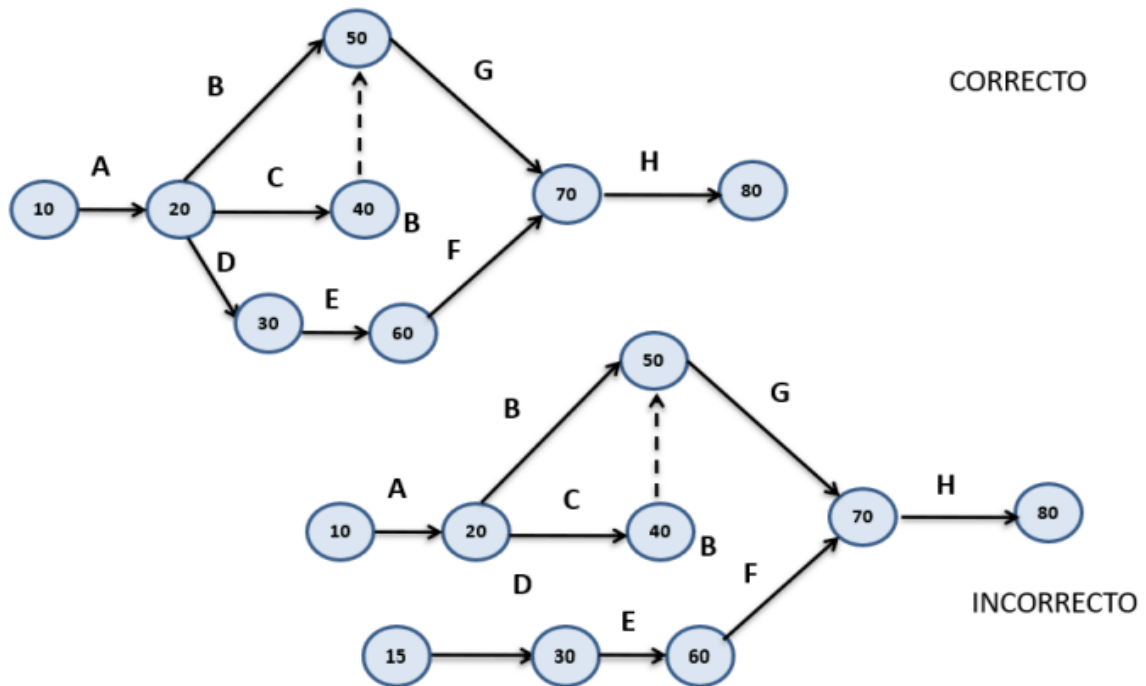
INCORRECTO

A

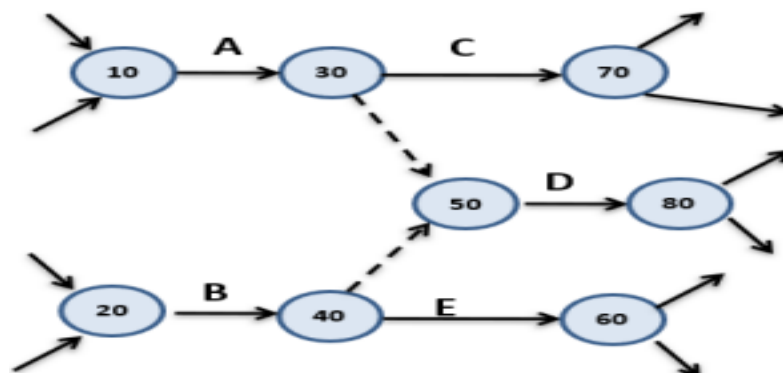


CORRECTO

- **SÉPTIMA:** Toda red de flechas debe ser cerrada, es decir, tener un inicio único y un fin único.



- **OCTAVA:** Las actividades ficticias deben utilizarse apropiadamente, para aclarar la lógica de la red y para evitar codificaciones repetidas de actividades

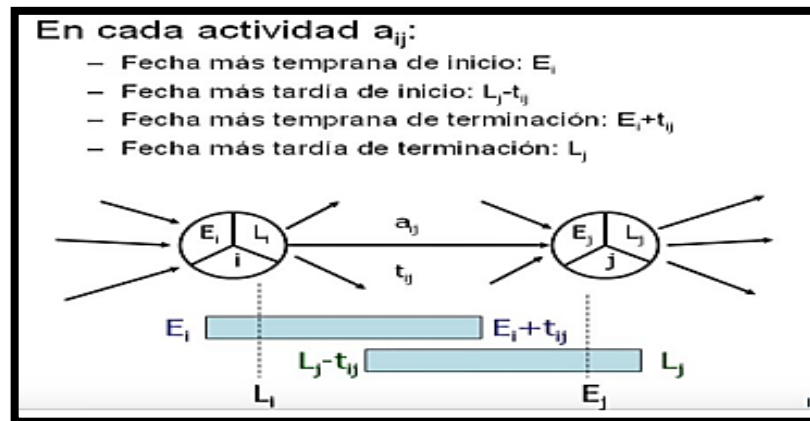


La actividad D depende de A y B; C depende solo de A y E depende solo de B.

1.5.4. Flechas y holguras de diagrama de redes

Una vez que se han establecido las actividades con sus respectivas duraciones y conexiones lógicas, y se ha creado el diagrama de flechas, el siguiente paso es calcular las fechas en que se pueden llevar a cabo cada actividad, lo que permite determinar la duración total del proyecto.

Figura 2 Fechas de los sucesos del método CPM



Fuente: Taboada Gilza, 2022.

1.6. Ejercicio aplicativo de la técnica CPM

1. Considerando el siguiente cuadro de actividades.

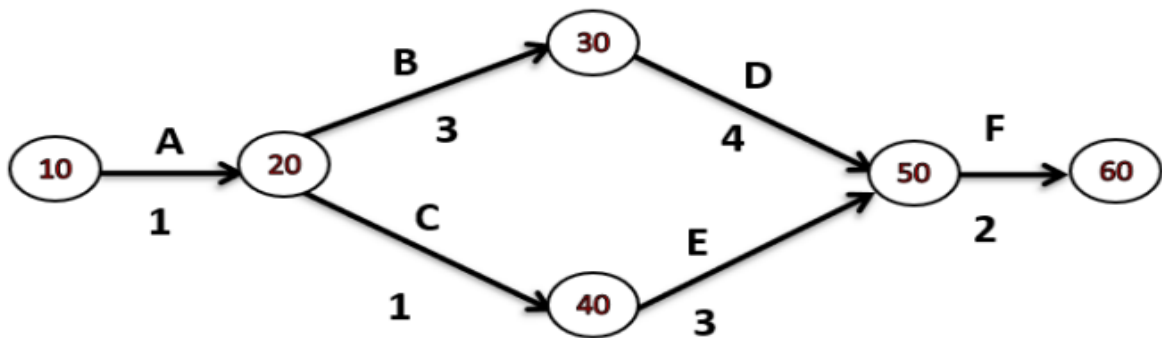
- Elabore el diagrama de redes.
- Determine el número de rutas que se pueden seguir para desarrollar el proyecto mediante el método de CPM.
- Indique la RUTA CRITICA del proyecto.
- Indique la duración total del proyecto.
- Calcular los tiempos optimistas y pesimistas.

ACTIVIDAD	CÓDIGO	PRECEDENCIAS	DURACIÓN (días)
INICIO DE OBRA	A		1
CONSTRUCCIONES PROVISIONALES	B	A	3
MOVIMIENTO DE TIERRAS	C	A	1
OFICINAS	D	B	4
NIVELACIÓN DE TERRENO	E	C	3
FIN DE OBRA	F	D, E	2

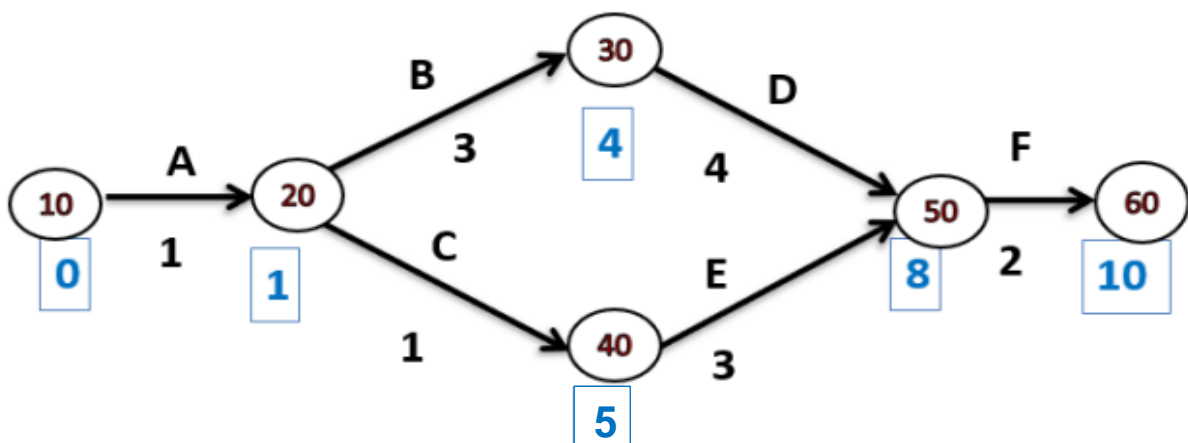
DESARROLLO

a. Calcular diagrama de flechas:

En esta etapa la actividad y su duración se anotan tanto encima como debajo de la flecha correspondiente.

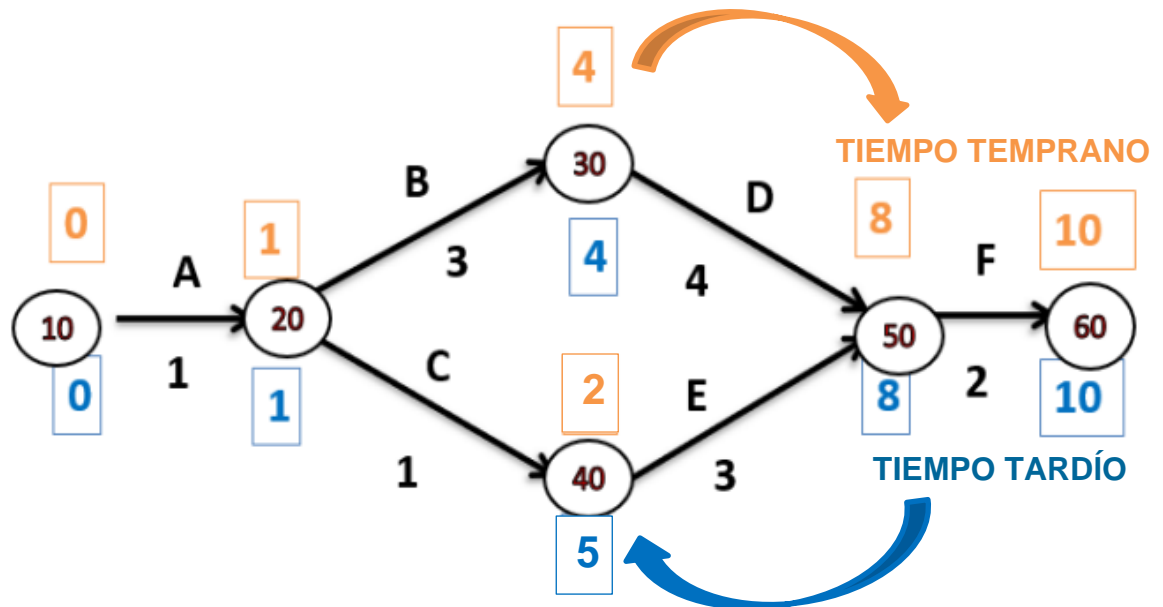


Lo primero que se realiza es recorrer los eventos en orden ascendente, registrando la primera fecha posible para alcanzarlos debajo del nodo. El evento inicial comienza el día cero, y para los siguientes, se calcula la fecha de finalización de las actividades que conducen a ellos, sumando la duración a la fecha de inicio. Se elige la fecha más tardía, ya que las actividades que terminan antes deben esperar. Al llegar al evento final, su fecha de inicio coincide con el término de la última actividad, estableciendo así el final del proyecto.

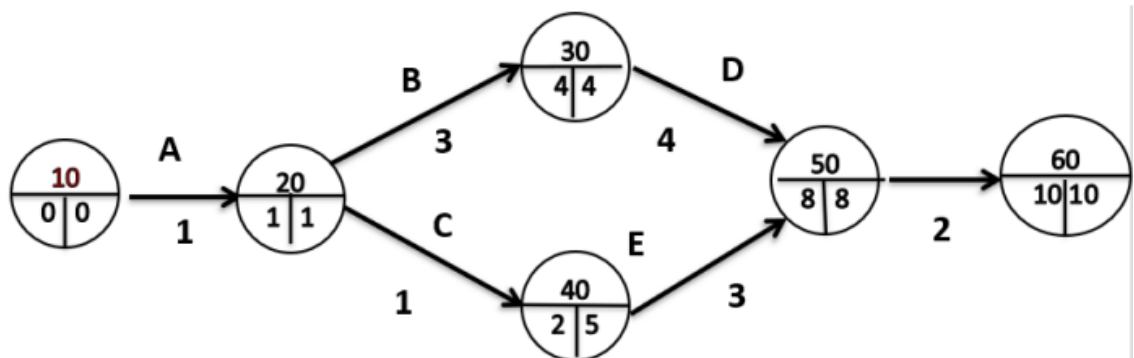


Conocida la fecha de finalización, se procede a calcular, en orden inverso, el último día en que cada actividad puede completarse sin afectar a las sucesoras, anotándolo encima

del nodo. En el evento final, el último día posible es el mismo que el primero, que se registra sobre el nodo. Para los demás eventos, se indica la última fecha de finalización menos la duración de la actividad, eligiendo la más temprana para evitar retrasos en las actividades posteriores. Al llegar al evento inicial, si los cálculos son correctos, la última fecha posible de inicio es el día cero.

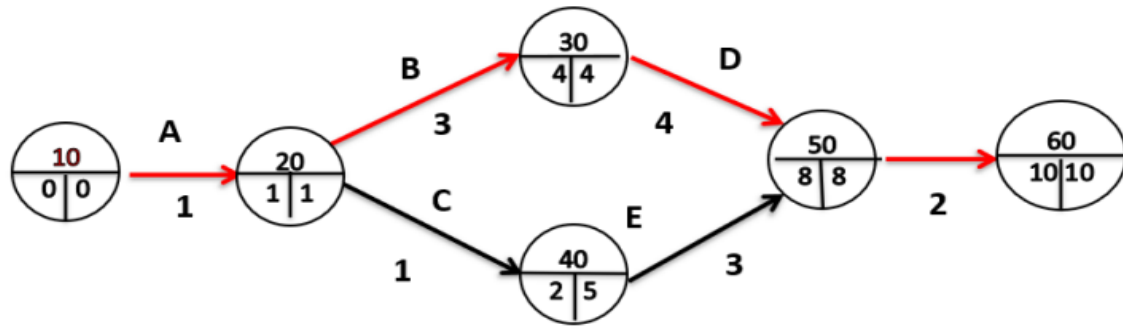


b. Diagrama de redes o flechas con sus fechas y holguras:



Una vez calculadas las fechas, se identifican los nodos sin holgura, donde las fechas de inicio primera y última coinciden. Estas actividades conforman el camino crítico y se destacan marcando las actividades que las enlazan con una línea doble.

c. Diagrama de redes -camino crítico:



d. Calculando los tiempos optimistas, pesimistas y la holgura de actividad:

Holgura de Actividad: Es la diferencia entre el tiempo de finalización pesimista y la suma del tiempo de inicio optimista junto con su duración

Actividades		Duración	Tiempo Optimista		Tiempo Pesimista		Holgura Actividad	Cond
Código			t^0		t^x			
i	J		t_i^0	t_j^0	t_i^x	t_j^x		
10	20	1	0	1	0	1	0	CRIT
20	30	3	1	4	1	4	0	CRIT
20	40	1	1	2	1	5	3	N.C
30	50	4	4	8	4	8	0	CRIT
40	50	3	2	8	5	8	3	N.C
50	60	2	8	10	8	10	0	CRIT

Dando respuesta a las interrogantes planteadas:

- **Nº de rutas:** 2
- **Ruta crítica:** A-B-D-F
- **Duración total del proyecto:** 10 días hábiles.

e. Resolución Mediante Programación Lineal:



Para encontrar la ruta crítica a través de la programación lineal podemos establecer las siguientes variables:

$$x_j = \text{tiempo acumulado hasta al nodo } j$$

Y se tiene las siguientes restricciones:

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

Es decir, para cada arco (i, j) que conecta el nodo j, el tiempo acumulado desde el nodo i más la duración de la actividad que une estos nodos (t_{ij}) debe ser mayor que el tiempo acumulado en el nodo j. Dado que la meta es culminar el proyecto, es importante minimizar la diferencia entre el tiempo acumulado en el nodo inicial (x_1) y el nodo final (x_f):

$$\text{Minimizar } z = x_f - x_1$$

PROGRAMACION LINEAL EN LINDO

Modelo matemático (Minimización)

$\text{Min } z = x_6 - x_1$	$\text{min } x_6 - x_1$	$\text{min } x_6 - x_1$
s.t.	st	st
$x_2 \geq x_1 + 1$	$x_2 \Rightarrow x_1 + 1$	$\text{(IO)} x_2 - x_1 \Rightarrow 1$
$x_3 \geq x_2 + 3$	$x_3 \Rightarrow x_2 + 3$	$\text{(CP)} x_3 - x_2 \Rightarrow 3$
$x_4 \geq x_2 + 1$	$x_4 \Rightarrow x_2 + 1$	$\text{(MT)} x_4 - x_2 \Rightarrow 1$
$x_5 \geq x_3 + 4$	$x_5 \Rightarrow x_3 + 4$	$\text{(OF)} x_5 - x_3 \Rightarrow 4$
$x_5 \geq x_4 + 3$	$x_5 \Rightarrow x_4 + 3$	$\text{(NT)} x_5 - x_4 \Rightarrow 3$
$x_6 \geq x_5 + 2$	$x_6 \Rightarrow x_5 + 2$	$\text{(FO)} x_6 - x_5 \Rightarrow 2$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	10.00000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X6	10.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000
X3	4.000000	0.000000
X4	5.000000	0.000000
X5	8.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
(IO)	0.000000	-1.000000
(CP)	0.000000	-1.000000
(MT)	3.000000	0.000000
(OF)	0.000000	-1.000000
(NT)	0.000000	0.000000
(FO)	0.000000	-1.000000
NO. ITERATIONS=		5

Condición de no negatividad:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Luego, ingresamos el comando en el software LINDO cuyos resultados se muestran a continuación:

$$z = 10, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 8 \text{ y } x_6 = 10,$$

esto establece que el proyecto puede ser culminado en 10 días.

2. Redes PERT

2.1. Historia de Redes PERT

Estas redes pueden considerarse una evolución del diagrama de Gantt, aunque hoy en día ambas técnicas se utilizan de manera complementaria en la gestión de proyectos. Esta herramienta fue creada en 1957 por la Oficina de Proyectos Espaciales de la Marina de Guerra de los Estados Unidos. Las iniciales PERT proviene de "Técnicas de Evaluación y Revisión de Proyectos" (Project Evaluation and Review Techniques, en inglés), desarrollada como parte del proyecto Polaris. Este fue uno de los primeros proyectos de su tipo, destacando su relevancia científica al combinar métodos matemáticos, estadísticos y probabilísticos para la asignación de tiempos de recursos.

2.2. ¿Qué es el método PERT?

El método PERT (Project Evaluation and Review Techniques) es un algoritmo basado en la teoría de redes diseñado para facilitar la planificación de proyectos. El algoritmo PERT se basa en intervalos probabilísticos, teniendo en cuenta tiempos optimistas, más probables y pesimistas. Esto lo distingue del método CPM (método de la ruta crítica), que se basa en tiempos determinísticos

2.3. ¿Cómo se construye una red PERT?

La red PERT se elabora en función de cada tarea o etapa necesaria para completar un proyecto, de manera similar a un diagrama de Gantt. Sin embargo, la principal diferencia es que en este caso se deben asignar tres tiempos de duración para cada actividad.

Existen tres tiempos que se pueden asignar:

- **Tiempo optimista:** Es el tiempo mínimo necesario para completar una tarea, asumiendo que no hay retrasos y sin tener en cuenta el impacto de factores externos al proyecto.

- **Tiempo más probable:** Es el tiempo más posible en el que se puede ejecutarse una tarea en específico.
- **Tiempo pesimista:** Es el tiempo estimado para realizar una tarea, considerando todos los posibles retrasos.

2.4. Duraciones probabilísticas

- **Duración más probable (m):** Se obtendría un mayor número de repeticiones si la operación se ejecuta repetidamente.
- **Duración optimista (a):** cuando todas las condiciones para su realización son óptimas.
- **Duración pesimista (b):** donde todas las condiciones son adversas y nada sale como está previsto.
- **Duración media o esperada (te):** se calcula mediante la siguiente expresión:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Siendo, por tanto: $a < m < b$.

2.5. Pasos para el diagrama del enfoque probabilístico de PERT

- **Paso 1: Elaborar el Diagrama de Flechas.**
- **Paso 2: Analizar los tiempos por cada actividad.**

Para cada actividad, se realizarán tres estimaciones del tiempo necesario:

Tiempo optimista (a): el periodo mínimo posible para completar la actividad.

Tiempo más probable (m): la mejor estimación del tiempo requerido.

Tiempo pesimista (b): el periodo máximo que podría llevar realizar la actividad. Así, se establece que $a < m < b$.

- **Paso 3: Calcular para actividad, el tiempo esperado necesario.**

El tiempo esperado estadísticamente es la media ponderada del tiempo que consumiría una actividad si se repitiera múltiples veces. Para cada actividad, se calculará este

tiempo aplicando las evaluaciones temporales realizadas en el paso 2 con la siguiente fórmula:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

El valor "te" es fundamental para todos los cálculos de tiempo en el diagrama de flechas del PERT, y se anotará para cada actividad sobre la línea que la representa.

- **Paso 4: Calcular la desviación estándar de la duración (seleccionar ruta crítica).**

Como la varianza no muestra en la gráfica de distribución de frecuencias una claridad en la medida de dispersión, se utiliza la desviación estándar, que nos mide la desviación de los datos respecto a la media. Es la raíz cuadrada de la varianza. Y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{(b-a)}{6}$$

- **Paso 5: Calcular varianza de la duración.** Es una medida fundamental de dispersión.

Es la desviación cuadrada media de cada observación. Sus unidades son los cuadrados de las unidades de la variable. Se utiliza en el cálculo de la red PERT:

- **Paso 6: Probabilidad de un plazo cualquiera.**

Z = Factor de probabilidad.

$$\sigma^2 = Var(A) = \frac{(b-a)^2}{36}$$

x = Tiempo contractual.

u = Tiempo total del proyecto, que depende de la duración de las actividades.

σ = Desviación estándar.

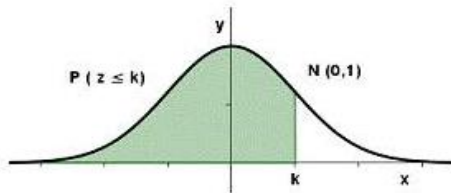
- **Paso 7: Probabilidad de un plazo cualquiera.** $Z = \frac{(x-u)}{\sigma}$

z = Distribucion Normal Estandar.

Figura 3 Valores de la función distribución normal estándar de PERT

Tabla de distribución normal tipificada $N(0,1)$

Los valores de la tabla normal representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Descargado por FRANS FUENTES MAZA (ingfrans@unj.edu.pe)

Encuentra más documentos en www.udocz.com

2.6. Limitaciones de las redes PERT

- El que el tiempo esperado tenga que calcularse a partir de tres estimaciones.
- El que solo se tenga en cuenta el camino crítico, prescindiendo de todos los demás.
- La suposición de que la duración total del proyecto se distribuya según ley normal.
- El sesgo de cada estimador.
- En la práctica se ha encontrado que da buenos resultados.
- Muchos prefieren ponderar el tiempo, en vez de dar una sola estimación.
- La inclusión de las duraciones optimistas y pesimista permite medir una posible variación del tiempo que de por sí siempre lo tiene.

2.7. Ejercicio aplicativo de redes PERT

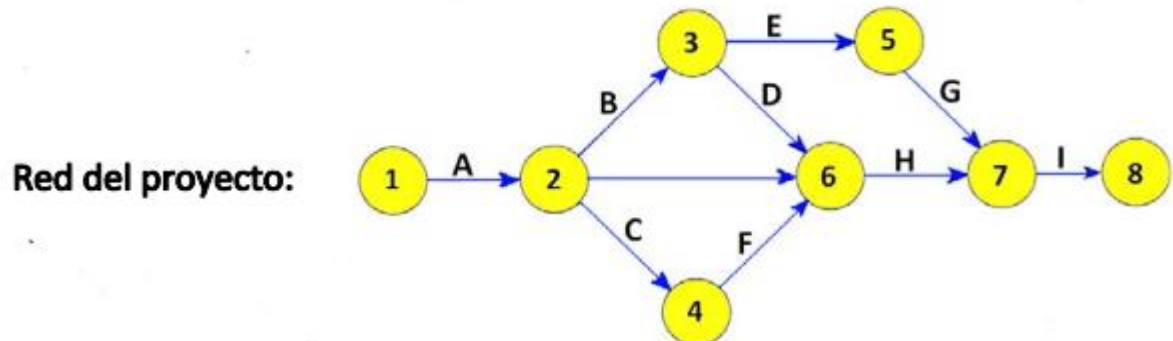
1. Una cadena de tiendas planea adquirir un ordenador para gestionar la contabilidad y el control de inventarios. Una empresa de software presenta un proyecto en días junto con un grafo al jefe de Marketing de las tiendas.

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)
(A) Selección del modelo	4	6	8
(B) Sistema de entrada/salida	5	7	15
(C) Diseño del sistema	4	8	12
(D) Montaje	15	20	25
(E) Programas	10	18	26
(F) Rutinas de entrada/salida	8	9	16
(G) Bases de datos	4	8	12
(H) Instalación	1	2	3
(I) Test	6	7	8

- a) Calcular el camino crítico y la duración esperada del proyecto.
- b) Evaluar la probabilidad de completar el proyecto en 55 días o menos.

DESARROLLO:

- ❖ **Paso 1:** Elaborar el Diagrama de Flechas.



- ❖ **Paso 2:** Analizar los tiempos para cada actividad, tal como de se detallan en la tabla siguiente.
- ❖ **Paso 3:** Calcular para cada actividad, el tiempo esperado necesario.

$$t_e(A) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{4 + 4 \times 6 + 8}{6} = 6$$

$$t_e(B) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{5 + 4 \times 7 + 15}{6} = 8$$

⋮

$$t_e(F) = \frac{a + 4m + b}{6} = \frac{8 + 4 \times 9 + 16}{6} = 10$$

- ❖ **Paso 4:** Calcular la Desviación estándar.

$$\sigma_A^2 = \text{Var}(A) = \frac{(8 - 4)^2}{36} = 0,44$$

$$\sigma_B^2 = \text{Var}(B) = \frac{(15 - 5)^2}{36} = 2,78$$

⋮

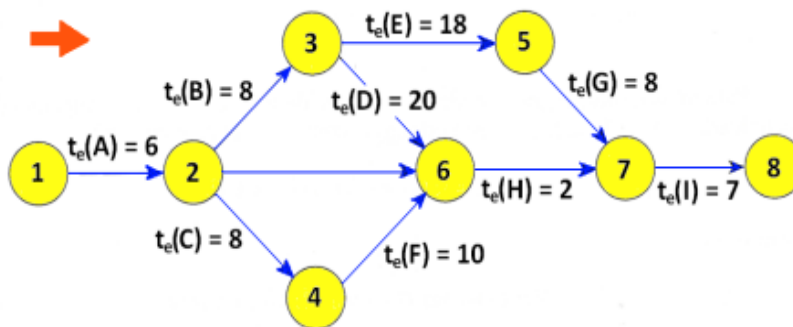
$$\sigma_F^2 = \text{Var}(F) = \frac{(16 - 8)^2}{36} = 1,78$$

- ❖ **Paso 5:** Calcular la varianza de la duración.

Actividad	Tiempo optimista (a)	Tiempo más probable (m)	Tiempo pesimista (b)	Tiempo esperado (t_e)	Varianza Var
A	4	6	8	6	0,44
B	5	7	15	8	2,78
C	4	8	12	8	1,78
D	15	20	25	20	2,78
E	10	18	26	18	7,11
F	8	9	16	10	1,78
G	4	8	12	8	1,78
H	1	2	3	2	0,11
I	6	7	8	7	0,11

❖ **Paso 6:** Calcular el Tiempo más temprano (T_1), el Tiempo más tardío (T_2) y el Tiempo de Holgura ($H = T_2 - T_1$).

- **Tiempo más temprano de un suceso T_1 (i-ésimo nodo)** - Se recorre la red de izquierda a derecha.



$$T_1(1) = 0 \quad T_1(2) = T_1(1) + t_e(A) = 0 + 6 = 6$$

$$T_1(3) = T_1(2) + t_e(B) = 6 + 8 = 14$$

$$T_1(4) = T_1(2) + t_e(C) = 6 + 8 = 14$$

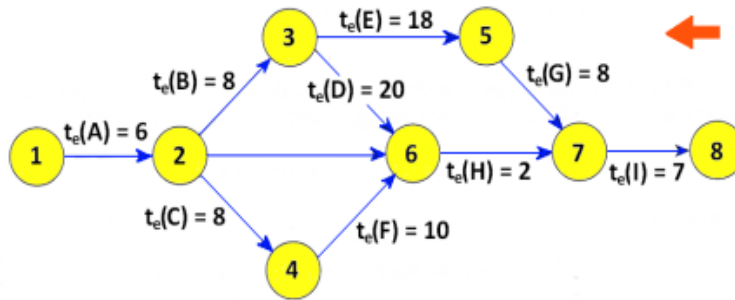
$$T_1(6) = T_1(3) + t_e(D) = 14 + 20 = 34 \quad T_1(6) = T_1(4) + t_e(F) = 14 + 10 = 34 \quad \max T_1(6) = 34$$

$$T_1(5) = T_1(3) + t_e(E) = 14 + 18 = 32$$

$$T_1(7) = T_1(6) + t_e(H) = 34 + 2 = 36 \quad T_1(7) = T_1(5) + t_e(G) = 32 + 8 = 40$$

$$T_1(8) = T_1(7) + t_e(I) = 40 + 7 = 47$$

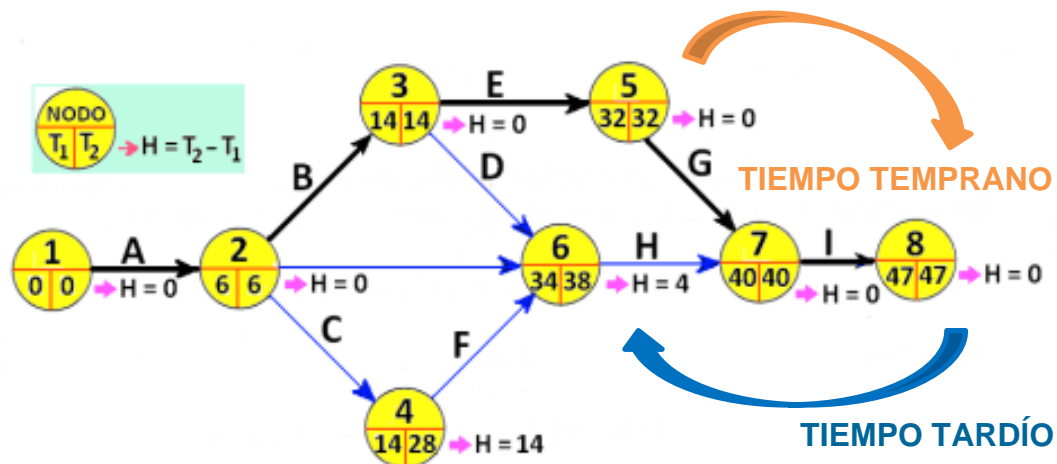
- **Tiempo más tardío de realización de un suceso T_2 (l-ésimo nodo) - Se recorre la red de derecha a izquierda.**



$$\begin{aligned}
 T_2(8) &= T_1(8) = 47 \\
 T_2(7) &= T_2(8) - t_e(I) = 47 - 7 = 40 \\
 T_2(6) &= T_2(7) - t_e(H) = 40 - 2 = 38 \\
 T_2(5) &= T_2(7) - t_e(G) = 40 - 8 = 32 \\
 T_2(4) &= T_2(6) - t_e(F) = 38 - 10 = 28 \\
 T_2(3) &= T_2(5) - t_e(E) = 32 - 18 = 14 \quad T_2(3) = T_2(6) - t_e(D) = 38 - 20 = 18 \quad \min T_2(3) = 14 \\
 T_2(2) &= T_2(3) - t_e(B) = 14 - 8 = 6 \quad T_2(2) = T_2(4) - t_e(C) = 28 - 8 = 20 \quad \min T_2(2) = 6 \\
 T_2(1) &= T_2(2) - t_e(A) = 6 - 6 = 0
 \end{aligned}$$

Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con menor tiempo esperado (tiempo Pert).

- **Tiempo de Holgura $H = T_2 - T_1$ - Diferencia entre el tiempo más tardío y el tiempo más temprano de un suceso. En unidades de tiempo corresponde al valor que puede tardar la ocurrencia de un suceso.**



a) **Calcular el camino crítico y duración esperada del proyecto:**

- **La ruta crítica:** 1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 8, formada por las actividades A, B, E, G, I con holgura total cero.
- **Duración total esperada del proyecto:** 47 días hábiles.

b) Cálculo de la desviación estándar y probabilidades:

Considerando las actividades que comprende la ruta crítica.

▪ Duración del proyecto:

$$\mu_{\text{PROYECTO}} = t_e(2) + t_e(3) + t_e(5) + t_e(7) + t_e(8) = 6 + 8 + 18 + 8 + 7 = 47 \text{ días}$$

▪ Varianza del proyecto:

$$\sigma_{\text{PROYECTO}}^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_5^2 + \sigma_7^2 + \sigma_8^2 = 0,44 + 2,78 + 7,11 + 1,78 + 0,11 = 12,22 \text{ días}^2$$

▪ Desviación estándar del proyecto:

$$\sigma_{\text{PROYECTO}} = \sqrt{\sigma_{\text{PROYECTO}}^2}$$

$$\sigma_{\text{PROYECTO}} = \sqrt{12,22} = 3,496 \text{ días}$$

La distribución del tiempo de finalización del proyecto, según el Teorema Central del Límite (TCL), se ajusta a una distribución normal:

$$N(\mu_{\text{PROYECTO}}, \sigma_{\text{PROYECTO}})$$

$$N(47, 3.496).$$

c) Determinar la probabilidad de finalizar el proyecto a lo sumo en 55 días.

Calculando la probabilidad de que el proyecto finalice a lo mucho en 55 días, para ello aplicamos el siguiente paso:

❖ Paso 7: Calcular la Probabilidad de un plazo cualquiera.

Z = Factor de probabilidad.

x = Tiempo en el cual queremos calcular la probabilidad.

u = Tiempo promedio de duración del proyecto.

σ = Desviación estándar del camino crítico.

$$Z = \frac{(x-u)}{\sigma}$$

$$P(X \leq 55) = P\left[\frac{X - 47}{3,496} \leq \frac{55 - 47}{3,496}\right]$$

$$IP(z \leq 2,29) = \Phi(2,29) = 0,9878$$

Donde $\Phi(z)$ corresponde a la función de distribución acumulada normal estándar:

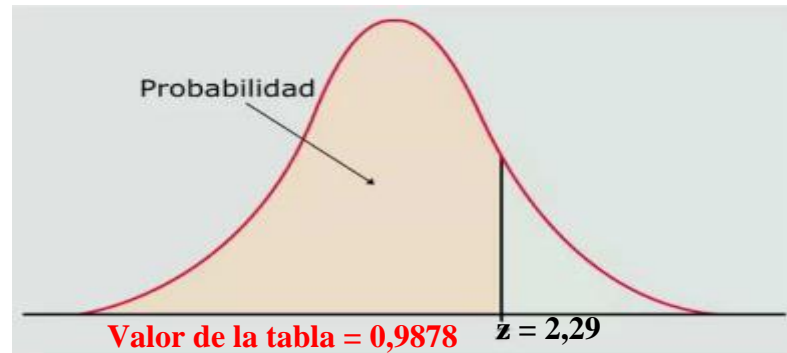


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890

Luego de efectuar los cálculos, existe la probabilidad de terminar el proyecto en 55 días como mucho en un 98,78 % de los casos.

3. DIFERENCIA ENTRE REDES PERT Y CPM

Los diagramas PERT y el método de la ruta crítica (CPM) son herramientas de gestión de proyectos enfocadas en el flujo y la secuencia de tareas en proyectos de gran envergadura. Ambas son útiles para la planificación y pueden mejorar la eficiencia del proyecto. La principal diferencia radica en que PERT se utiliza principalmente para determinar el tiempo necesario para completar un proyecto, mientras que CPM se aplica en proyectos más predecibles y recurrentes. En resumen, PERT es un método para planificar y gestionar el tiempo, mientras que CPM se centra en el control de costos y plazos.

4. CONCLUSIONES

1. Se estableció los conceptos teóricos como prácticos relacionados con la formulación de programación lineal en el contexto de CPM (Método del Camino Crítico) y Redes PERT (Técnica de Revisión y Evaluación de Programas) de la cual se concluyó que son métodos muy importantes puesto que permiten identificar la ruta crítica del proyecto, optimizar la asignación de recursos y minimizar el tiempo total del proyecto.
2. Ambas técnicas se basan en la representación del proyecto como una red de actividades, con flechas que representan las relaciones de precedencia entre las actividades.
3. El diagrama PERT es una herramienta importante para la gestión de proyectos complejos, ya que representa las actividades del proyecto como una red de interdependencias. Esto facilita la identificación del camino crítico y permite gestionar el tiempo y los riesgos vinculados al proyecto.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baca Urbina, Gabriel. (2001). Formulación y Evaluación de Proyectos. México: Ed. McGraw-Hill.

Sapag Chain, Nassir y Reinaldo. (2005). Preparación y Evaluación de Proyectos 4ta. Edición. México: McGraw-Hill. Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social –Ilpes-. (1981).

Guía para la Presentación de Proyectos. México: ILPES. Alcaraz Rodríguez, Rafael. (2004). El Emprendedor de Éxito. Guía de Planes de Negocios. México: Ed. McGraw-Hill.

<https://www.questionpro.com/blog/es/diagrama-de-pert/>

https://www.inf.utfsm.cl/~esaez/fio/s1_2004/apuntes/pert-2004-1.pdf

<https://www.estadistica.net/INVESTIGACION/PERT-CPM.pdf>